Berlin 1960

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE · JG. IX (1959/60) 3
WISS. Z. HUMBOLDT-UNIV. BERLIN, MATH.-NAT. R. IX (1959/60)

Als Manuskript gedruckt

Aus dem II. Mathematischen Institut der Humboldt-Universität zu Berlin.
Direktor: Nationalpreisträger Prof. Dr. KURT SCHRÖDER

Neue Konfidenzintervalle für den Parameter der Binomialverteilung*

Von OLAF BUNKE

Nat. Promotion 10.6.60

INHALT

I. Einleitung
1. Von Forderungen der Praxis zur mathematischen Aufgabenstellung
2. Ziele der vorliegenden Arbeit

II. Systematische Behandlung der bekannten Intervallschätzungen für den Parameter der Binomialverteilung

III. Neue verbesserte Konfidenzintervalle

IV. Beurteilung der verschiedenen Verfahren der Intervallschätzung und Vergleich mit dem neuen Verfahren

V. Mittlere Konfidenzintervalle

VI. Aufstellung von optimalen mittleren Konfidenzintervallen

VII. Graphischer und numerischer Vergleich der mittleren Konfidenzintervalle mit den anderen Intervallschätzungen

VIII. Anwendungen in Wirtschaft und Wissenschaft

IX. Tabellen
1. Mittlere Konfidenzintervalle $\beta = 0{,}95$
2. Extremale Konfidenzintervalle $\beta = 0{,}95$
3. Extremale Konfidenzintervalle $\beta = 0{,}99$
4. Konfidenzintervalle bei seltenen Merkmalen $\beta = 0{,}95$
5. Konfidenzintervalle bei seltenen Merkmalen $\beta = 0{,}99$

I. Einleitung

1. Von Forderungen der Praxis zur mathematischen Aufgabenstellung

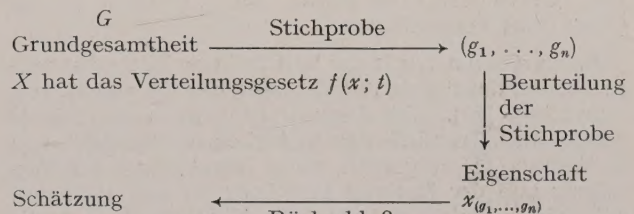
In Wirtschaft und Wissenschaft wird oft die Aufgabe gestellt, die relative Häufigkeit eines Merkmales in einer gegebenen Menge von Dingen (Grundgesamtheit) mittels einer Stichprobe zu schätzen. Einige Beispiele dafür sind:

a) Bestimmung des Prozentsatzes von Produkten schlechter Qualität in der Produktion eines Werkes (z. B. Glühbirnen mit zu geringer Brenndauer).

b) Voraussage der Häufigkeit von Defekten an Maschinen bei bestimmter Belastung.

c) Die Heilwirkung eines Medikamentes nach Erprobung an einer Anzahl von Patienten.

Diese Probleme werden mathematisch im wesentlichen durch das gleiche statistische Modell dargestellt. Es gibt eine Menge von Dingen: die Grundgesamtheit G. Bestimmte Eigenschaften der Dinge g_i, die in G enthalten sind, treten mit verschiedenen Häufigkeiten auf. Es existieren Verteilungsgesetze $f(x;\, t)$ für diese Eigenschaften x in der Grundgesamtheit, wobei X die Menge aller Eigenschaften aus G ist. Dabei hängen die Verteilungsgesetze von einem Parameter t ab. Es wird eine zufällige Stichprobe $(g_1, \ldots g_n)$ von n Dingen (Elementen) herausgenommen (vorausgesetzt G habe mindestens n Elemente). n ist der Stichprobenumfang. Das vorliegende Modell sieht schematisch folgendermaßen aus:



Dabei ist jeder möglichen Stichprobe $(g_1, \ldots, g_n)$ eine bestimmte Eigenschaft $x_{(g_1, \ldots, g_n)}$ aus X zugeordnet. Aus den Eigenschaften der Stichprobe $(g_1, \ldots, g_n)$ werden also Rückschlüsse auf die Werte t gezogen, wobei die Gestalt des Verteilungsgesetzes $f(x;\, t)$ bekannt ist. Das ist eines der Hauptprobleme der mathematischen Statistik. Die Stichproben müssen völlig zufällig aus der Grundgesamtheit entnommen werden. Die Technik der Stichprobenentnahme wird hier nicht behandelt. Sie stützt sich soweit wie möglich auf Erfahrung. Wenn eine bestimmte Methode zur Gewinnung zufälliger Stichproben angewandt wird, so ist es möglich, durch entsprechende statistische Tests die Zufälligkeit nachzuprüfen (z. B. durch den Iterationstest).

Die in dieser Arbeit betrachteten Mengen werden bezüglich des Stichprobenumfanges als unendlich groß angenommen.

Im Falle der Häufigkeitsschätzung sieht das statistische Modell folgendermaßen aus:

Die Elemente der Grundgesamtheit G können nur eine von zwei alternativen Eigenschaften annehmen, die durch $x = 1$ und $x = 0$ repräsentiert werden. X besteht also aus zwei Elementen $x = 1$ und $x = 0$, die mit den Häufigkeiten p bzw. $1 - p$ in der Grundgesamtheit

* Als Dissertation eingereicht ~~1959~~.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

N 53/60

vorkommen. Hier ist das Verteilungsgesetz der Eigenschaften gleich

$$f(x; p) = p^x(1-p)^{1-x}.$$

Das Schätzproblem ist dann folgendes: Aus der Anzahl z der Elemente in der Stichprobe mit der Eigenschaft $x = 1$ ist der Parameter p zu schätzen.

Nach dem „starken Gesetz der großen Zahlen" [20] konvergiert die relative Häufigkeit $\frac{z}{n}$ des Merkmals $x = 1$ in der Stichprobe mit wachsendem n stark gegen die Häufigkeit p (Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Merkmales bei einem Element der Grundgesamtheit). Die starke Konvergenz bedeutet, daß das Ereignis „$\lim_{n\to\infty} \frac{z}{n} = p$" die Wahrscheinlichkeit Eins hat. Der Stichprobenumfang n ist endlich, und es ist unmöglich, den Parameter p mit Sicherheit anzugeben. Ebenso ist es unmöglich, eine Menge von Werten anzugeben, in der die Häufigkeit p sicher liegt, mit Ausnahme von trivialen Mengen wie:

$$0 \leq p \leq 1 \quad \text{oder} \quad 0 < p \leq 1,$$

nachdem das Merkmal in der Stichprobe auftrat. Es ist aber möglich, eine Aussage in der Form: „p liegt zwischen $\underline{p}$ und $\overline{p}$" zu machen, wobei $\underline{p}$ und $\overline{p}$ bestimmte untere bzw. obere Grenzen sind, die nach einer Vorschrift der Häufigkeit des Merkmals in der Stichprobe zugeordnet werden. Diese Aussage wird mit einer bestimmten Sicherheit β, die kleiner als 1 ist, gemacht, z. B. mit $\beta = 0{,}95$. Das ist die Methode der Schätzintervalle (der sogenannten Konfidenzintervalle). Eine Sicherheit von 95% bedeutet, daß in fünf von 100 Fällen solcher Schätzungen von Häufigkeiten ein Irrtum begangen wird. Diese Methode der Intervallschätzung wurde von J. Neyman [2] im Jahre 1934 vorgeschlagen.

Es wurden im Laufe der Zeit mehrere Methoden ausgearbeitet, dazu auch Tabellenwerke wie die von H. von Schelling [21]. Eine bequem zu benutzende Tabelle wurde im „Grundriß der biologischen Statistik" von E. Weber [21] aufgestellt, unter Benutzung der F-Verteilung und der Methode von Clopper und Pearson. Alle diese Verfahren haben die Eigenschaft, daß die Sicherheit nicht genau gleich der geforderten Sicherheit β ist, sondern daß β eine untere Schranke für die Sicherheit ist. Schon J. Neyman [4] hatte bewiesen, daß man bei Häufigkeitsschätzungen keine Konfidenzintervalle mit einer genauen Sicherheit β aufstellen kann. In letzter Zeit erschienen englische und amerikanische Veröffentlichungen, die sich mit dem Problem der Häufigkeitsschätzung beschäftigen, z. B. 1958: von Armitage [22] und von Clunies-Ross [23]. H. C. Hamaker [17] schlug ein Verfahren vor, das kürzere Konfidenzintervalle ergab, die aber eine Sicherheit haben, die um β schwankt.

2. Ziele der vorliegenden Arbeit

Die Vorteile der Intervallschätzung sind nicht hinreichend bekannt, und die teilweise mühevollen Rechnungen und die schlechte Verbreitung von Tabellen sind Ursachen für die ablehnende Haltung unserer Praxis. Vor der verstärkten Anwendung der mathematischen Erkenntnisse in Wirtschaft und Wissenschaft ist es aber notwendig, die bekannten Verfahren der Intervallschätzung zu beurteilen, um sich auf die vorteilhaftesten zu beschränken und um eine einheitliche Anwendung und Tabellierung zu erreichen. In dieser Arbeit wird die Frage behandelt, welche Eigenschaften solch ein vorteilhaftes Verfahren haben muß. Die bekannten Verfahren werden systematisch untersucht. Die meisten Verfahren können auf einen Ansatz von Clopper und Pearson zurückgeführt werden. Es kann ein neues Verfahren angegeben werden, das vorteilhaftere Konfidenzintervalle ergibt als alle übrigen Verfahren.

Ebenso werden die von Hamaker vorgeschlagenen Intervalle kritisiert, und es wird möglich, optimale „mittlere" Konfidenzintervalle aufzustellen. Es wird gezeigt, wie in speziellen Anwendungsproblemen zwischen den beiden neuen Verfahren entschieden werden muß.

Für die Berechnung der neuen Konfidenzintervalle wird ein Rechenschema angegeben, und es werden Tabellen beigefügt, in denen für verschiedene Konfidenzkoeffizienten β und für verschiedene Stichprobenumfänge die Konfidenzintervalle berechnet sind.

Einige Beispiele sollen einen Einblick in das große Anwendungsgebiet der Konfidenzintervalle geben.

II. Systematische Behandlung der bekannten Intervallschätzungen für den Parameter der Binomialverteilung

Im folgenden werden nur zufällige Größen betrachtet, die eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x; t)$ besitzen. Bei diskreten zufälligen Größen, die endliche Wahrscheinlichkeiten p_i in Punkten P_i besitzen, kann man formal auch mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x; t)$ arbeiten. An Stelle der Wahrscheinlichkeit am Punkte P_i schreibt man in den Formeln $f(P_i; t)$ und an Stelle von Summen über Punktwahrscheinlichkeiten stehen Integrale (bei Benutzung der Deltafunktion

$$\delta(x): \begin{cases} \delta(x) = 0 & x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

müßte man exakt

$$f(x; t) = \sum_i p_i \delta(x - P_i)$$

schreiben).

Es sei also eine zufällige Größe X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x; t)$ gegeben, wobei t ein beliebiger reeller Parameter ist. Eine zufällige Stichprobe [19] bedeutet Realisierungen $(x_1, \ldots, x_n)$ der zufälligen Größe X. Die Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ wird mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichproben sei

$$f(\mathfrak{x}; t) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; t).$$

Gesucht ist eine Schätzung des Parameters t mittels der Stichprobe.

Dazu gibt es verschiedene Methoden.

1. Die klassische Bayesche Methode [9]

Diese Methode nimmt an, daß der Parameter t auch eine zufällige Größe ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichte dieser zufälligen Größe sei gleich $\varphi(t)$. Dann gilt nach der Bayeschen Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle t unter der Voraussetzung einer gezogenen Stichprobe

$$g(t; \mathfrak{x}) = \frac{\varphi(t) f(\mathfrak{x}; t)}{\int \varphi(t) f(\mathfrak{x}; t)\, d\mathfrak{x}},$$

wobei $f(\mathfrak{x}; t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichproben ist und $\int f(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

bedeutet.

Man kann danach ein Intervall $(a(\mathfrak{x}), b(\mathfrak{x}))$ angeben, in dem t mit der Wahrscheinlichkeit β liegt, also

$$\int_{a(\mathfrak{x})}^{b(\mathfrak{x})} g(t; \mathfrak{x})\, dt = \beta \quad \text{ist.}$$

In der Annahme, daß t eine zufällige Größe ist, liegt der entscheidende Nachteil dieser Methode. Erstens braucht t keine zufällige Variable zu sein, sondern ist oft ein ganz bestimmter konstanter Wert; zweitens weiß man über eine eventuelle Verteilung von t meistens wenig. Im allgemeinen kann man gar nicht entscheiden, ob t als zufällige Variable aufgefaßt werden kann oder überhaupt keinen zufälligen Charakter trägt. Daher ist man bestrebt gewesen, andere Wege zu beschreiten, die keine Vorkenntnisse über den Parameter voraussetzen.

2. Die Methode der Punktschätzung

Bei der Methode der Punktschätzung wird eine Funktion $h(\mathfrak{x})$ der Stichprobe $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ benutzt, die den Parameter t approximieren soll und die Schätzfunktion genannt wird. Die Theorie dieser Schätzfunktionen ist schon weit ausgebaut worden, es wurde eine Klassifizierung der Schätzfunktionen durchgeführt, und die Eigenschaften der „besten" Schätzfunktionen wurden präzisiert. Es wurden Methoden angegeben, um die besten Schätzfunktionen zu finden [13].

R. A. Fisher [13] führte den Begriff der Maximum-Likelihood-Schätzung ein, die bei vielen Problemen alle Eigenschaften der „besten" Schätzfunktion besitzt.

Die Funktion $L(t) = f(\mathfrak{x}; t)$ als Funktion des Parameters t bei festem $\mathfrak{x}$ wird Likelihood genannt, wobei $f(\mathfrak{x}; t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichproben ist.

Hat für festes $\mathfrak{x}$ die Likelihood $L(t)$ ein absolutes Maximum bei $t = \hat{t}(\mathfrak{x})$, dann wird $h(\mathfrak{x}) = \hat{t}(\mathfrak{x})$ die Maximum-Likelihood-Schätzung des Parameters t genannt. Jetzt wird die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Parameter p der Binomialverteilung durchgeführt.

Hat man eine Grundgesamtheit mit Objekten, die zwei alternative Eigenschaften besitzen können (z. B. „defekt" und „nicht defekt"), so ordnet man der einen Eigenschaft die Zahl Eins und der anderen Eigenschaft die Zahl Null zu. Dadurch kommt man zu dem Schema, in dem p die Häufigkeit bedeutet, mit der die Dinge mit Eins in der Grundgesamtheit vorkommen. Die zufällige Größe X nehme den Wert $x = 1$ mit der Wahrscheinlichkeit p und dem Wert $x = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ an.

Die Stichprobe $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ hat dann die Wahrscheinlichkeit

$$f(\mathfrak{x}; p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = p^z q^{n-z},$$

wobei z die Anzahl der Elemente $x_m = 1$ in der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Da es $\binom{n}{z}$ verschiedene Stichproben $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = z$ gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß es z Elemente $x_m = 1$ in der Stichprobe gibt, gleich

$$P(z; p) = b_z(p) = \binom{n}{z} p^z q^{n-z},$$

also ist z binomial verteilt.

Jetzt soll p auf Grund der Stichprobe geschätzt werden. Hier ist die Likelihood $L(p) = p^z q^{n-z}$. Aus

$$\frac{d}{dp} L(p) = z p^{z-1}(1-p)^{n-z} - (n-z) p^z (1-p)^{n-z-1} = 0$$

folgt $$z(1-p) = (n-z)p,$$

also ist $$\hat{p}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1} \frac{x_i}{n} = \frac{z}{n}$$

die Maximum-Likelihood-Schätzung des Parameters p.

3. Die Methode der Konfidenzintervalle

Die Maximum-Likelihood-Schätzung ist nicht befriedigend, da keine Aussage über die Genauigkeit der Schätzung gemacht werden kann und der wirkliche Parameterwert nur sehr selten auf diese Weise richtig geschätzt wird. Als Beispiel wird die Binomialverteilung betrachtet mit Stichprobenumfang $n = 40$ und zu schätzendem Parameter $p = 0{,}5$. Damit die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{p}(\mathfrak{x})$ den Wert 0,5 annimmt, muß die Stichprobe $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots x_n)$ zwanzig Elemente, die gleich Eins sind, haben. Dafür hat man die Wahrscheinlichkeit $b_{20}\ (0{,}5) = 0{,}125$, d. h. nur in 12,5% der Fälle wird der Paramter p richtig geschätzt.

Neyman [2] schlug im Jahre 1934 vor, Schätzintervalle (Konfidenzintervalle) für den Parameter t anzugeben. An die Stelle eines Wertes für den Parameter t tritt eine Menge $G(\mathfrak{x})$ von Werten, in welchen der zu schätzende Parameter t liegen soll. Diese Menge hängt von der gezogenen Stichprobe $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ab. Dann kann die Menge $K(t)$ bestimmt werden als Menge aller Stichproben, deren $G(\mathfrak{x})$ den Parameter t enthält. Es ist dann $t \in G(\mathfrak{x})$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{x} \in K(t)$.

Definition:

Die Menge $G(\mathfrak{x})$ heißt Konfidenzintervall zum Konfidenzkoeffizienten β für den Parameter t bei gegebener Stichprobe $\mathfrak{x}$, wenn die Wahrscheinlichkeit, daß der Parameter in der Menge $G(\mathfrak{x})$ liegt, immer gleich β ist, also:

$$\begin{aligned} &P(\text{„Konfidenzintervall ist richtig"}; t) \\ &= P(\text{„}t \in G(\mathfrak{x})\text{"}; t) = P(\text{„}\mathfrak{x} \in K(t)\text{"}; t) \\ &= \int_{K(t)} f(\mathfrak{x}; t)\, d\mathfrak{x} = \beta \qquad \text{für alle } t \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Hat man eine Stichprobe $\mathfrak{x}$ gezogen, so bedeutet β nicht die Wahrscheinlichkeit, daß t im Konfidenzintervall $G(\mathfrak{x})$ enthalten ist. Der Parameter t ist keine zufällige Größe, sondern eine unbekannte Konstante. Darum ist die Aussage „t ist enthalten im Konfidenzintervall' entweder richtig oder falsch, also hat sie die Wahrscheinlichkeit Eins bzw. Null.

Werden aus verschiedenen Grundgesamtheiten mit den Parametern t^i Stichproben von irgendwelchen Umfängen n^i genommen und dann die Konfidenzintervalle zum Konfidenzkoeffizienten β für die Parameter t^i aufgestellt, so ist es zufällig, ob die Intervalle richtig sind oder nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Konfidenzintervall richtig ist, wird gleich β sein, denn es ist P („Konfidenzintervall ist richtig"; t^i) $= \beta$.

Nach dem „Gesetz der großen Zahlen" werden ungefähr $100 \cdot \beta\%$ der Intervallschätzungen richtig sein.

Ein Konfidenzintervall muß nach der obigen Definition kein wirkliches Intervall sein. In der Praxis ist es sinnvoll, als Konfidenzintervalle nur wirkliche Intervalle zu betrachten. Man erhält dann Aussagen in der Form:

$$\text{„}\underline{t}(\mathfrak{x}) < t < \bar{t}(\mathfrak{x})\text{"} \quad \text{mit} \quad P\big(\text{„}\underline{t}(\mathfrak{x}) < t < \bar{t}(\mathfrak{x})\text{"}, t\big) = \beta,$$

wobei t der wahre Parameter ist. Bei der Aussage „$t \in (\underline{t}, \bar{t})$" ist jeder Wert aus $(\underline{t}, \bar{t})$ gleichberechtigt. Es ist wertlos, eine Aussage der Form: „$t \in (\underline{t}, \bar{t})$ und t liegt sehr nahe an einer bestimmten Punktschätzung $\hat{t}$" zu machen, denn der Begriff „nahe an $\hat{t}$" führt dazu, ein Intervall um $\hat{t}$ abzugrenzen, führt also wieder zur Intervallschätzung.

Um Konfidenzintervalle zu finden, kann folgende Methode angewandt werden: Es wird eine Funktion $T(\mathfrak{x}, t)$ der Stichprobe $\mathfrak{x}$ und des Parameters t gesucht, die eine zufällige Größe ist, mit einer Wahrscheinlich-

keitsdichte $g(T)$, die von t nicht abhängt. Hängt $T(\mathfrak{x}, t)$ bei festem $\mathfrak{x}$ monoton und stetig von t ab, so ist die Eigenschaft „$\underline{T} < T(\mathfrak{x}, t) < \overline{T}$“ gleichbedeutend mit „$\underline{t}(\mathfrak{x}) < t < \overline{t}(\mathfrak{x})$“, wobei $T(\mathfrak{x}, \underline{t}(\mathfrak{x})) = \underline{T}$ und $T(\mathfrak{x}, \overline{t}(\mathfrak{x})) = \overline{T}$ ist. Wählt man die Zahlen $\underline{T}$ und $\overline{T}$ so, daß

$$\int_{\underline{T}}^{\overline{T}} g(T)\, dT = \beta \quad \text{gilt, ist} \quad \left(\underline{t}(\mathfrak{x}), \overline{t}(\mathfrak{x})\right)$$

ein Konfidenzintervall zum Konfidenzkoeffizienten β, da $P\left(„\underline{t} < t < \overline{t}“; t\right) = P\left(„\underline{T} < T < \overline{T}“; t\right) = \int_{\underline{T}}^{\overline{T}} g(T)\, dT = \beta$ gilt.

Es ist aber nicht immer möglich, eine solche Funktion zu finden.

Es gibt eine andere Methode, die vielleicht unmittelbarer zur Aufstellung von Konfidenzintervallen führt. Es seien nur Parameterwerte aus dem Intervall (a, b) möglich. Wird angenommen, daß der wahre Wert des Parameters gleich t_0 ist, so findet man die Konfidenzgrenzen folgendermaßen (Abb. 1):

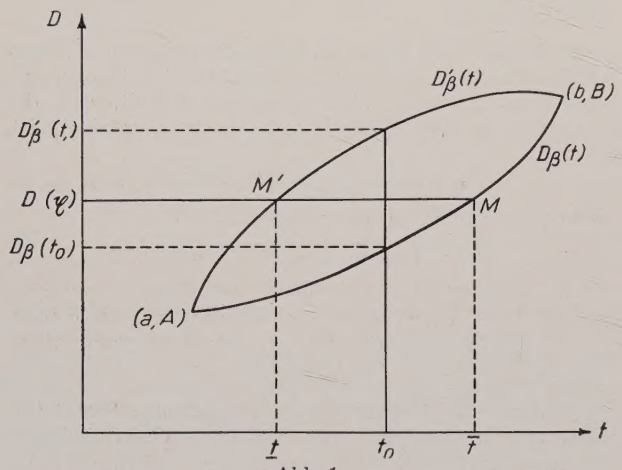


Abb. 1

Es sei $D(\mathfrak{x})$ eine Funktion der Stichprobe mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $g(D; t)$. Für alle Stichproben seien die Werte $D(\mathfrak{x})$ im Intervall (A, B) enthalten.

Es wird angenommen, daß zwei Funktionen $D_{\beta}(t)$, $D'_{\beta}(t)$ existieren, mit

$$\int_{a}^{D_{\beta}(t)} g(D; t)\, dD = P_1$$

$$P_1 + P_2 = 1 - \beta$$

$$\int_{D'_{\beta}(t)}^{b} g(D; t)\, dD = P_2.$$

Außerdem seien beide Funktionen monoton wachsend und variieren von A bis B, wenn t von a bis b variiert.

Die Stichprobe sei gezogen. Es wird die Gerade $D = D(\mathfrak{x})$ gezeichnet. Diese schneidet die Kurven $D'_{\beta}(t)$ und $D_{\beta}(t)$ in M' und M. Dann ist $\left(\underline{t}, \overline{t}\right)$ die Projektion von $\overline{M'M}$ auf die t-Achse.

In Abb. 1 ist zu sehen, daß das Intervall t_0 dann und nur dann bedecken wird, wenn $D_{\beta}(t_0) < D(\mathfrak{x}) < D'_{\beta}(t_0)$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit für das letztere ist:

$$P(„D_{\beta}(t_0) < D(\mathfrak{x}) < D'_{\beta}(t_0)“; t_0) = 1 - \int_{D'_{\beta}(t_0)}^{b} g(D; t)\, dD - \int_{a}^{D_{\beta}(t_0)} g(D; t)\, dD = \beta.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Parameter t_0 im Intervall $\left(\underline{t}, \overline{t}\right)$ liegt, gleich:

$$P\left(„\underline{t}(\mathfrak{x}) < t_0 < \overline{t}(\mathfrak{x})“; t_0\right) = P(„D_{\beta}(t_0) < D(\mathfrak{x}) < D'_{\beta}(t_0)“; t_0) = \beta.$$

Dabei ist nach der Konstruktion:

$$\underline{t} = \underline{t}(\mathfrak{x}) = D'^{-1}_{\beta}(D(\mathfrak{x}))$$

und

$$\overline{t} = \overline{t}(\mathfrak{x}) = D^{-1}_{\beta}(D(\mathfrak{x})).$$

Alle Schlüsse gelten für beliebige Parameter t_0 aus (a, b), und deshalb sind die Intervalle $\left(\underline{t}(\mathfrak{x}), \overline{t}(\mathfrak{x})\right)$ Konfidenzintervalle zum Konfidenzkoeffizienten β.

R. A. Fisher hat einen anderen Begriff statt der Konfidenzgrenzen eingeführt: die Fiduzialgrenzen. Die sog. Fiduzialauffassung der Schätzintervalle weicht von der der Konfidenzintervalle ab, und nur in einigen Fällen fallen die Fiduzialgrenzen mit den Konfidenzgrenzen zusammen [8]. Die Fiduzialauffassung benutzt Gedankengänge, die nicht mehr exakt sind, und wendet Schlüsse an, die von subjektiven Momenten getragen werden. Im Gegensatz zu der Fiduzialauffassung bleibt die Theorie der Konfidenzintervalle im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zu der letzten Methode der Gewinnung der Konfidenzintervalle ist noch zu sagen, daß sie bei diskreten Verteilungen angewandt worden ist. Clopper und Pearson [3] benutzten die Methode für den Parameter der Binomialverteilung, und Ricker [5] benutzte sie für den Parameter der Poisson-Verteilung. In beiden Fällen wurde die Methode in abgeänderter Form angewandt, da man diskrete Verteilungen hatte und der Begriff der Konfidenzintervalle anders gefaßt werden mußte.

Man kann beweisen, daß man im Falle der Binomialverteilung keine Konfidenzintervalle zu $\beta \in (0,1)$ aufstellen kann (Neymann [4]).

Satz 1

Voraussetzung: Die zufällige Größe X nehme die Werte $x = 1$ und $x = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p = q$ an. Dann hat $z = \sum_{i=1}^{n} x_i$ die Binomialwahrscheinlichkeit

$$b_z(p) = \binom{n}{z} p^z q^{n-z},$$

wobei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe mit dem Stichprobenumfang $n \geq 1$ ist.

Behauptung: Es gibt kein System von Intervallen $\left(\underline{p}_z, \overline{p}_z\right)$ mit

$$P(„\underline{p}_z < p < \overline{p}_z“; p) = \beta$$

für alle p, bei $0 \leq p \leq 1$ und $0 < \beta < 1$.

Beweis: Es sei angenommen, daß die Konfidenzintervalle $\left(\underline{p}_z, \overline{p}_z\right)$ existieren ($z = 0,1, \ldots n$). Da es $2n$ Konfidenzgrenzen $\underline{p}_z$, $\overline{p}_z$ gibt, kann man ein Intervall I angeben, das in $(0,1)$ liegt und keine der Grenzen $\underline{p}_z$ oder $\overline{p}_z$ enthält.

Die Wahrscheinlichkeit, daß p in einem Konfidenzintervall liegt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit derjenigen Werte $z = \sum_{i=1}^{n} x_i$, deren Intervalle $\left(\underline{p}_z, \overline{p}_z\right)$ den Parameter p enthalten.

Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich der Summe der Binomialwahrscheinlichkeiten $b_z(p)$, die den z-Werten entsprechen, also ein Polynom in p. Die z-Werte sind für jeden Parameterwert p aus I dieselben, also stimmen die ent-

sprechenden Polynome überein. Nach der Voraussetzung ist $P(„\underline{p}_z < p < \overline{p}_z“;\ p) = \beta$ für jedes p aus I, die Glieder mit positiven Potenzen von p verschwinden im Polynom, und das konstante Glied muß gleich β sein. Andererseits ist die einzige Binomialwahrscheinlichkeit mit einem p nicht enthaltenden Glied die Wahrscheinlichkeit $b_0(p) = (1-p)^n = 1 +$ Potenzen von p. Danach muß aber das konstante Glied gleich Eins sein im Widerspruch zur Voraussetzung $\beta < 1$. Damit ist die Annahme, daß ein derartiges System von Intervallen existiert, falsch, w. z. b. w.

Es gibt also Verteilungen, wie z. B. die Binomialverteilung, bei denen es keine Konfidenzintervalle zum Konfidenzkoeffizienten β gibt. Um hier trotzdem zu Schätzintervallen zu kommen, ändert man die Definition der Konfidenzintervalle etwas ab: Statt zu verlangen, daß die Wahrscheinlichkeit P („der Parameter p liegt im Konfidenzintervall“; p) $= \beta$ für alle Parameter p ist, wird jetzt gefordert, daß P(„p liegt im Konfidenzintervall“; p) $\geq \beta$ ist.

Mit dieser schwächeren Forderung kann man für den Parameter der Binomialverteilung immer Konfidenzintervalle aufstellen.

1. Clopper und Pearson [3] haben als erste solche Konfidenzintervalle aufgestellt. Im folgenden wird diese Methode dargestellt. Die Bezeichnungen seien die gleichen wie früher. Die Wahrscheinlichkeit, daß in der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ die Anzahl der Elemente $x_m = 1$ gleich z ist, wird gleich

$$P\left(„\sum_{i=1}^{n} x_i = z“;\ p\right) = b_z(p).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß z größer oder gleich m wird, ist die Summe der Binomialwahrscheinlichkeiten dieser Werte z, also

$$P\left(„\sum_{i=1}^{n} x_i = z \geq m“;\ p\right) = \sum_{k=m}^{n} b_k(p) = S_m(p).$$

$S_m(p)$ hängt stetig und differenzierbar von p ab. Für die Summen $S_m(p)$ gelten folgende Sätze:

Satz 2

Behauptung:

$$\frac{d}{dp} S_m(p) = m \binom{n}{m} p^{m-1} q^{n-m}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp} S_m(p) &= \frac{d}{dp}\left(\sum_{k=m}^{n} b_k(p)\right) = \sum_{k=m}^{n} k \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=m+1}^{n} (n-k+1) \binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= m \binom{n}{m} p^{m-1} q^{n-m}, \text{ w. z. b. w.}\end{aligned}$$

Satz 3

Behauptung: $S_m(p)$ ist monoton wachsend für $m > 0$. $(p \in (0,1))$.

Beweis: Es ist nach Satz 2 $\frac{d}{dp} S_m(p) > 0$ für alle $p \in (0,1)$ bei $m > 0$. Damit ist dann $S_m(p)$ monoton wachsend, w. z. b. w.

Satz 4

Behauptung: $S_m(p) = 1 - S_{n-m+1}(q)$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}S_m(p) &= \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= 1 - \sum_{j=n-m+1}^{n} \binom{n}{j} p^{n-j} q^j = 1 - S_{n-m+1}(q),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

Es sei $0 < \beta < 1$ und $P_1 + P_2 = 1 - \beta = \alpha$, $P_i < 0$. Dann existiert ein $\underline{p}_z$ und ein $\overline{p}_z$ mit:

$$1 - S_{z+1}(\overline{p}_z) = P_1 \qquad 0 \leq z < n \qquad (a)$$

$$S_z(\underline{p}_z) = P_2 \qquad 0 < z \leq n. \qquad (b)$$

$S_{z+1}(p)$ ist monoton wachsend mit p. Es ist $S_{z+1}(o) = 0$ und $S_{z+1}(1) = 1$, damit gibt es wegen der Stetigkeit von $S_{z+1}(p)$ einen Wert $\overline{p}_z$ mit $S_{z+1}(\overline{p}_z) = 1 - P_1$. Genauso gibt es ein $\underline{p}_z$ mit $S_z(\underline{p}_z) = P_2$. Wie man bemerkt, ist die Grenze $\overline{p}_n$ aus dem Ansatz (a) nicht zu bestimmen. Genauso ist $\underline{p}_0$ nicht aus (b) zu bestimmen, da $S_0(p)$ konstant gleich 1 ist. Gewöhnlich setzt man $\underline{p}_0 = 0$ und $\overline{p}_n = 1$, außerdem werden diese Grenzen zum Intervall gezählt. Wenn z. B. keine Elemente $x_n = 1$ in der Stichprobe vorkommen, ist es einleuchtend, daß der wahre Parameter möglicherweise gleich Null ist. Es gibt Versuche, die Ansätze (a) und (b) durch andere zu ersetzen, aus denen sich alle Konfidenzgrenzen ergeben. Es wird jetzt ein Satz bewiesen, nach dem zwangsläufig die Grenze $\underline{p}_0$ gleich Null und die Grenze $\overline{p}_n$ gleich Eins sein muß.

Satz 5

Voraussetzung: Es seien die Intervalle $(\underline{p}_z, \overline{p}_z)$ ein System von Konfidenzintervallen zum Konfidenzkoeffizienten β. Der Stichprobenumfang sei n und es sei $0 < \beta < 1$.

Behauptung: Es ist $\underline{p}_0 = 0$ und $\overline{p}_n = 1$ und die Grenzen werden zum Intervall gezählt.

Beweis: Wäre $\underline{p}_0$ größer als Null, so würde $p = 0$ in keinem Konfidenzintervall liegen. Also würde P(„o liegt in einem Konfidenzintervall“; o) $= 0$ sein. Wäre $\overline{p}_n$ kleiner als Eins, dann würde genauso P(„1 liegt in einem Konfidenzintervall“; 1) $= 0$ folgen.

In beiden Fällen wäre also P(„p liegt in einem Konfidenzintervall“; p) gleich Null, in Widerspruch zur Voraussetzung $\beta > 0$. Also muß $\underline{p}_0 = o$ und $\overline{p}_n = 1$ sein, und diese Grenzen müssen zum Intervall gezählt werden.

Jetzt muß bewiesen werden, daß die Wahrscheinlichkeit

$$P(„\underline{p}_z < p < \overline{p}_z“;\ p)$$

bei beliebigen p größer oder gleich β ist, wobei $\underline{p}_z$, $\overline{p}_z$ die in (a) und (b) definierten Werte sind. Wegen

$$S_{m+1}(p) < S_m(p)$$

sind die Konfidenzgrenzen entsprechend den Indizes der Größe nach geordnet:

$$\underline{p}_0 < \underline{p}_1 < \cdots < \underline{p}_n;\ \overline{p}_0 < \overline{p}_1 < \cdots < \overline{p}_n.$$

1. Es sei $p < \overline{p}_0$ und $\underline{p}_{i-1} < p \leq \underline{p}_i$; bei $1 \leq i \leq n$. Dann liegt der Parameter p dann und nur dann in einem Konfidenzintervall $(\underline{p}_z, \overline{p}_z)$ wenn $z < i$ ist, sonst wäre:

$$p \leq \underline{p}_i \leq \underline{p}_z < \overline{p}_z.$$

Also ist

$$P(„\underline{p}_z < p < \overline{p}_z“;\ p) = P(„z < i“;\ p) = 1 - S_i(p).$$

Es gilt

$$S_i(p) \leq S_i(\underline{p}_i) = P_2$$

wegen der Monotonie von $S_i(p)$ und (b). Damit hat man

$$P(„\underline{p}_z < p < \overline{p}_z“;\ p) \geq 1 - P_2 \geq 1 - P_1 - P_2 = \beta.$$

Existiert für $p < \overline{p}_0$ kein i mit $p \leq \underline{p}_i$, dann kann nur

noch gelten: $\underline{p}_n < p < \overline{p}_0$. Diese Parameter p liegen in jedem Konfidenzintervall und es ist

$$P(\text{„}\underline{p}_z < p < \overline{p}_z\text{“}; p) = 1,$$

also auch größer als β.

2. Es sei $\underline{p}_n < p$ und $\overline{p}_k \leq p < \overline{p}_{k+1}$ bei $0 \leq k \leq n-1$. Dann ist

$$P(\text{„}\underline{p}_z < p < \overline{p}_z\text{“}; p) = P(\text{„}z > k\text{“}; p) = S_{k+1}(p).$$

Es gilt: $S_{k+1}(p) \geq S_{k+1}(\overline{p}_k)$ wegen der Monotonie von $S_{k+1}(p)$ und (a). Also ist

$$P(\text{„}\underline{p}_z < p < \overline{p}_z\text{“}; p) \geq P_1 \geq 1 - P_1 - P_2 = \beta.$$

Existiert für $\underline{p}_n < p$ kein k mit $\overline{p}_k \leq p$, dann kann nur noch gelten: $\underline{p}_n < p < \overline{p}_0$. Also ist

$$P(\text{„}\underline{p}_z < p < \overline{p}_z\text{“}; p) = 1 > \beta.$$

3. Für die Parameter p, die nicht die Bedingungen in 1. und 2. erfüllen, gibt es Indizes i und k mit: $\underline{p}_{i-1} < p \leq \underline{p}_i$ und $\overline{p}_k \leq p < \overline{p}_{k+1}$ bei $1 \leq i \leq n$ und $0 \leq k \leq n-1$. Der Parameter p liegt dann und nur dann nicht im Intervall $(\underline{p}_z, \overline{p}_z)$, wenn $z \leq i$ oder $k \geq z$ ist. Damit gilt: $P(\text{„}p$ liegt in keinem Konfidenzintervall“; $p) = P(\text{„}z \geq i\text{“}; p) + P(\text{„}z \leq k\text{“}; p) = S_i(p) + 1 - S_{k+1}(p)$. Also ist $P(\text{„}p$ liegt in einem Konfidenzintervall“; $p) = 1 - (S_i(p) + 1 - S_{k+1}(p)) = S_{k+1}(p) - S_i(p)$.

Wegen (a) und (b) und der Monotonie von $S(p)$ ist:

$$S_{k+1}(p) \geq S_{k+1}(\overline{p}_k) = 1 - P_1 \quad \text{und} \quad S_i(p) \leq S_i(\underline{p}_i) = P_2.$$

Damit ist $P(\text{„}p$ liegt in einem Konfidenzintervall“; $p) \geq 1 - P_1 - P_2 = \beta$.

Es ist also für alle Parameter p $(0 \leq p \leq 1)$ der Konfidenzkoeffizient β eine untere Schranke für

$$P(\text{„}\underline{p}_z < p < \overline{p}_z\text{“}; p).$$

Damit sind die Konfidenzintervalle von Clopper und Pearson gefunden. Neyman [4] behauptete, daß die Konfidenzintervalle von Clopper und Pearson nicht zu verbessern seien, da man nicht erreichen kann, daß $P(\text{„}$Konfidenzintervall ist richtig“; $p)$ gleich β ist.

Mit Hilfe von Tafeln der F-Verteilung kann man die Konfidenzgrenzen von Clopper und Pearson finden. Im „Grundriß der biologischen Statistik“ von E. Weber [21] sind dazu Tabellen aufgestellt; für $\beta = 0{,}99$ und $\beta = 0{,}95$ und für n von 1 bis 50, 60, 70 und so weiter bis 100, 150, 200, 300 und 500.

Jetzt wird gezeigt, wie man auf diese Weise die Konfidenzgrenzen berechnet. Es gelten folgende Sätze:

Satz 6

Voraussetzung: Die unvollständige Beta-Funktion ist

$$I_t(s, r) = \frac{\int_0^t x^{s-1}(1-x)^{r-1}\,dx}{\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{r-1}\,dx}.$$

Behauptung: Es gilt:

$$S_k(p) = I_p(k, n-k+1).$$

Beweis: Es ist

$$\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{r-1} = \frac{(s-1)!\,(r-1)!}{(r+s-1)!},$$

also

$$I_p(k, n-k+1) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx.$$

Partielle Integration führt zu:

$$I_p(k, n-k+1) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\,p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} + \cdots + p^n, \quad \text{also} \quad I_p(k, n-k+1) = S_k(p),$$

w. z. b. w.

Satz 7

Voraussetzung: $f(F)$ sei die Dichte der F-Verteilung (mit den Freiheitsgraden n_1, n_2).

Es sei

$$\frac{q}{p} = \frac{n_1}{n_2}F. \tag{1}$$

Behauptung:

$$\int_F^\infty f(F)\,dF = 1 - I_q\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$$

Beweis: Es ist

$$f(F) = \frac{\left(\frac{n_1+n_2-2}{2}\right)!\; n_1^{\frac{n_1}{2}}\, n_2^{\frac{n_2}{2}}\, F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(\frac{n_1-2}{2}\right)!\,\left(\frac{n_2-2}{2}\right)!\,(n_2+n_1F)^{\frac{n_1+n_2}{2}}},$$

also:

$$f(F) = \frac{(r+s+1)!}{r!\,s!}\left(\frac{n_1F}{n_2+n_1F}\right)^r\left(\frac{n_2}{n_2+n_1F}\right)^s\frac{n_1n_2}{(n_2+n_1F)^2}$$

bei

$$r = \frac{n_1-2}{2}, \quad s = \frac{n_2-2}{2}.$$

Aus (1) folgt

$$q = \frac{n_1F}{n_2+n_1F}; \quad p = \frac{n_2}{n_2+n_1F}$$

und

$$\frac{dq}{dF} = \frac{n_1n_2}{(n_2+n_1F)^2}.$$

Dann gilt:

$$\int_F^\infty f(F)\,dF = \int_q^1 \frac{(r+s+1)!}{r!\,s!}\,q^r(1-q)^s\,dq = \frac{\int_0^1 q^r(1-q)^s\,dq}{\int_0^1 q^r(1-q)^s\,dq} - \frac{\int_0^q q^r(1-q)^s\,dq}{\int_0^1 q^r(1-q)^s\,dq} = 1 - I_q(r+1, s+1),$$

w. z. b. w.

Der Ansatz von Clopper und Pearson wird jetzt folgendermaßen weitergeführt:

(a) $$1 - S_{z+1}(\overline{p}_z) = P_1$$

bedeutet also nach Satz 6:

$$1 - I_{\overline{p}_z}(z+1, n-z)$$

und nach Satz 7:

$$\int_F^\infty f(F)\,dF = P_1 \quad \text{mit} \quad F = \frac{n_2p}{n_1q}.$$

Es muß also $F = F_{P_1}$ sein, wobei

$$\int_{F_{P_1}}^\infty f(F)\,dF = P_1$$ ist.

Wegen Satz 7 ist jetzt

$$\overline{p}_z = \frac{n_1F}{n_2+n_1F}. \tag{C}$$

Dabei ist $n_1 = 2(z+1)$, $n_2 = 2(n-z)$.

(b) $$S_z(\underline{p}_z) = P_2.$$

Nach Satz 4 gilt:

$$S_z(\underline{p}_z) = 1 - S_{n-z+1}(\underline{q}_z) = P_2$$

($\underline{q}_z = 1 - \underline{p}_z$) und nach Satz 6 ist:

$$P_2 = 1 - I_{\underline{q}_z}(n - z + 1,\ z).$$

Genau wie oben folgt aus dem Satz 7 $F = F_{P_2}$ und

$$\underline{p}_z = \frac{n_2}{n_2 + n_1 F} \quad \text{mit} \quad n_1 = \lambda(n - z + 1):\ n_2 = 2z. \qquad (C')$$

Nach den Formeln (C), (C') ist es jetzt möglich, die Konfidenzgrenzen mit Hilfe einer Tafel von Sicherheitspunkten der F-Verteilung zu berechnen [21].

2. Es ist möglich, mit Hilfe der Normalapproximation zur Binomialverteilung Approximationsformeln für die Konfidenzintervalle von Clopper und Pearson zu geben. Millot [1] hat 1923 die Formeln aufgestellt, ohne die Bedeutung der $(\underline{p}_z, \overline{p}_z)$ als Konfidenzintervalle zu erkennen.

Für große Stichprobenumfänge n ist nach dem Grenzwertsatz von Moivre-Laplace [20] $b_z(p)$ ungefähr gleich

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}}\, e^{-\frac{(z-np)^2}{2npq}}.$$

also gleich der Dichte $u(z)$ der Normalverteilung $N(np, npq)$ mit dem Erwartungsmoment np und der Varianz npq.

(Hald [16] untersucht den Fehler bei der Normalapproximation mit einem $n > \frac{9}{pq} \geq 36$, wobei p nicht zu nahe an 0 oder 1 liegt).

Die Approximation ist für diese n recht brauchbar. Die Approximation ist so zu verstehen: Es wird eine zufällige Größe Z betrachtet, die kontinuierliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Dabei ist die Wahrscheinlichkeitsdichte folgende:

$$\begin{aligned}
&v(z) = 0 && \text{für} && z < -\frac{1}{2}\\
&v(z) = b_z(p) && \text{für} && -\frac{1}{2} \leq z < +\frac{1}{2}\\
&v(z) = b_1(p) && \text{für} && +\frac{1}{2} \leq z < +\frac{3}{2}\\
&\quad \text{usw.}\\
&v(z) = b_n(p) && \text{für} && n - \frac{1}{2} \leq z < n + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Diese zufällige Größe ist also ungefähr gleich der zufälligen Größe Y mit der Verteilung $N(np, npq)$.

Es gilt:

$$(P\,,,0 \leq z \leq g'';\ p) = \sum_{z=0}^{g} b_z(p) = \int_{-\infty}^{g+\frac{1}{2}} v(z)\,dz.$$

Dann ist $P\,(,,0 \leq z \leq g'';\ p)$ ungefähr gleich $\int_{-\infty}^{g+\frac{1}{2}} u(z)\,dz$. $u(z)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung $N(np, npq)$.

Nach dem Satz 8, der jetzt bewiesen wird, ist

$$\int_{-\infty}^{g+\frac{1}{2}} u(z)\,dz = \int_{-\infty}^{g'} n(z)\,dz,$$

wobei $n(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung $N(0,1)$ und

$$g' = \frac{g + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}$$

ist.

Satz 8

Voraussetzung: Die zufällige Größe R sei nach $N(m, s^2)$ verteilt, die Wahrscheinlichkeitsdichte sei $g(r)$. Durch die Transformation $a + br = t$ sei die zufällige Größe T definiert. Ihre Verteilungsfunktion und Dichte seien $H(t)$ bzw. $h(t)$.

Behauptung: T ist nach $N(a + bm, (bs)^2)$ verteilt.

Beweis: Substituiert man bei

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} h(y)\,dy$$

y durch $a + bx$, so erhält man:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t-a}{b}} b \cdot h(a + bx)\,dx.$$

Andererseits gilt:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t-a}{b}} g(x)\,dx,$$

da

$$P(,,-\infty < y < t'') = P(,,-\infty < a + bx < t'')$$
$$= P\left(,,-\infty < x < \frac{t-a}{b}''\right)$$

ist. Daraus folgt:

$$g(x) = b \cdot h(a + bx),$$

also

$$h(a + bx) = \frac{1}{bs\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}.$$

Daraus folgt

$$h(t) = \frac{1}{bs\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[t-(a+bm)]^2}{2(bs)^2}}.$$

Es ist deshalb T nach $N(a + bm, (bs)^2)$ verteilt, w. z. b. w.

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(0,1)$ sei $\Phi(z)$.

Damit ist

$$P(,,0 \leq z \leq g'';\ p) \approx \Phi\left(\frac{g + \frac{1}{2} - m}{s}\right),$$

mit

$$m = np,\ s^2 = npq.$$

Genauso ist:

$$P(,,g \leq z \leq n'';\ p) = S_g(p) = \int_{g-\frac{1}{2}}^{\infty} v(z)\,dz \approx \int_{\frac{g-\frac{1}{2}-m}{s}}^{\infty} n(z)\,dz$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{g - \frac{1}{2} - m}{s}\right).$$

Die Konfidenzgrenzen von Clopper und Pearson werden jetzt approximiert.

a) Es ist $P_1 = 1 - S_{z+1}(\overline{p}_z)$ gleich $\Phi\left(\frac{z + \frac{1}{2} - \overline{m}}{\overline{s}}\right)$ bei $\overline{m} = n\overline{p}_z$, $\overline{s}^2 = n\overline{p}_z(1 - \overline{p}_z)$.

Daraus hat man $\frac{z + \frac{1}{2} - \overline{m}}{\overline{s}} = u_{P_1}(A)$, wobei u_{P_1} der Sicherheitspunkt der Normalverteilung $N(0,1)$ zu P_1 ist:

$$\int_{-\infty}^{u_{P_1}} n(z)\,dz = P_1.$$

b) Es ist $P_2 = S_z(\underline{p}_z)$ gleich $1 - \Phi\left(\frac{z - \frac{1}{2} - \underline{m}}{\underline{s}}\right)$ bei $\underline{m} = n\underline{p}_z$, $\underline{s}^2 = n\underline{p}_z(1 - \underline{p}_z)$.

Damit muß also

$$\frac{z - \frac{1}{2} - \underline{m}}{\underline{s}} = u_{1-P_2} \quad \text{sein.} \qquad (B)$$

(*A*) und (*B*) sind quadratische Gleichungen für die Konfidenzgrenzen. Man erhält sie demnach aus folgenden Formeln:

$$\underline{p}_z = \frac{1}{n+u^2_{1-P_2}}\left\{z-\frac{1}{2}+\frac{u^2_{1-P_2}}{2} - u_{1-P_2}\left[\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(n-z+\frac{1}{2}\right)}{n}+\frac{u^2_{1-P_2}}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\overline{p}_z = \frac{1}{n+u^2_{P_1}}\left\{z+\frac{1}{2}+\frac{u^2_{P_1}}{2} - u_{P_1}\left[\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(n-z+\frac{1}{2}\right)}{n}+\frac{u^2_{P_1}}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

3. Auch Prigge [6] hat 1937 in einem Artikel über biologische Messungen Approximationsformeln aufgestellt Er berücksichtigte dabei nicht die Kontinuitätskorrektur 1/2, die in der vorigen Approximation auftrat. Die Approximationsformeln wurden für $P_1 = P_2 = (1-\beta)/2$ aufgestellt.

Die Priggeschen Formeln sind von der folgenden Gestalt:

$$\underline{p}_z = \frac{1}{n+u^2_{1-P}}\left\{z+\frac{u^2_{1-P}}{2} - u_{1-P}\left[\frac{z(n-z)}{n}+\frac{u^2_{1-P}}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\overline{p}_z = \frac{1}{n+u^2_{P}}\left\{z+\frac{u^2_{P}}{2} - u_{P}\left[\frac{z(n-z)}{n}+\frac{u^2_{P}}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Wie bei 2. approximieren diese Formeln die Konfidenzintervalle von Clopper und Pearson nur für große n und Parameterwerte p, die nicht zu nahe an Null oder Eins liegen. Dies bedeutet, daß bei Werten z/n, die sehr nahe an Null oder Eins liegen, bei Benutzung der Formeln Vorsicht am Platze ist. Von H. von Schelling wurden Tabellen zur Berechnung dieser Konfidenzintervalle nach Prigge für Sicherheiten von 68%, 95,5% und 99,73% aufgestellt. Gewöhnlich operiert man jedoch mit Sicherheiten von 95%, 99% und 99,9% [21].

4. R. A. Fisher hat in verschiedenen Gebieten der Statistik folgende nützliche Transformation angewendet:

$$y = 2 \arcsin \sqrt{h}.$$

Mit Hilfe dieser Transformation kann man auch approximative Konfidenzintervalle aufstellen [16].

Die Transformation

$$y = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z}{n}}$$

bewirkt, daß die Varianz der zufälligen Größe

$$Y = 2 \arcsin \sqrt{Z\, n^{-1}}$$

unabhängig von p ist. Z ist die in 2. definierte zufällige Größe mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $v(z)$.

Es gilt der Satz 9:

Voraussetzung: Die zufällige Größe Z hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $v(z)$. Die Transformation

$$y = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z}{n}}$$

führe Z in die zufällige Größe Y über.

Behauptung: Y ist ungefähr nach

$$N\left(2 \arcsin \sqrt{p}, \frac{1}{n}\right)$$

verteilt.

Beweis:

$$y = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z}{n}} = y\left(\frac{z}{n}\right)$$

ist eine ungefähr lineare Funktion. Nach dem Taylorschen Satz ist dann

$$y\left(\frac{z}{n}\right) \approx y(p) + \left(\frac{z}{n}-p\right) y'(p) = a + bz$$

$$\text{mit} \quad a = y(p) - p\,y'(p) \quad \text{und} \quad b = \frac{y'(p)}{n}.$$

Die zufällige Größe Z ist für große n ungefähr gleich der zufälligen Größe R, die nach $N(m, s^2)$ verteilt ist ($m = np$, $s^2 = npq$). Dann ist die zufällige Größe Y ungefähr nach $N(bm + a, (bs)^2)$ verteilt, wegen Satz 8. Es ist

$$b^2 s^2 = \frac{y'^2(p)\, n\, p(1-p)}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{wegen} \quad y'(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

Damit ist Y ungefähr nach $N\left(y(p), \frac{1}{n}\right)$ verteilt, w. z. b. w.

Der Satz 9 gestattet es, aus dem Ansatz von Clopper und Pearson zu neuen Approximationsformeln zu kommen.

(a) $$1 - S_{z+1}(\overline{p}_z) = P_2.$$

Daraus folgt:

$$P_1 = \sum_{m=0}^{z} b_m(p) = \int_{-\infty}^{z+\frac{1}{2}} v(z)\, dz,$$

wobei $v(z)$ die im Satz 9 definierte Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Dann ist bei $y(x) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z}{n}}$:

$$P_1 = P(„m \le z“; \overline{p}_z) = P\left(„y\left(\frac{m}{n}\right) \le y\left(\frac{z}{n}\right)“; \overline{p}_z\right)$$

ungefähr gleich

$$\int_{-\infty}^{y(z'/n)} r(y)\, dy$$

nach Satz 9, wobei $r(y)$ die Dichte der Normalverteilung

$$N\left(y(\overline{p}_z), \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad z' = z + \frac{1}{2} \quad \text{ist.}$$

Nach Satz 8 ist dann:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\,[y(z'/n) - y(\overline{p}_z)]} n(z)\, dz,$$

wobei $n(z)$ die Dichte von $N(0,1)$ ist.

(b) $$P_2 = S_z(\underline{p}_z).$$

Daraus folgt genau wie in (a):

$$P_2 = \int_{\sqrt{n}\,[y(z''/n) - y(\underline{p}_z)]}^{-\infty} n(z)\, dz, \quad z'' = z - \frac{1}{2}$$

Aus (a) und (b) folgen die Formeln für die Konfidenzgrenzen, mit $\int_{-\infty}^{u_p} n(z)\, dz = P$:

$$2 \arcsin \sqrt{\overline{p}_z} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z}{n}} - \frac{u_{P_1}}{\sqrt{n}}$$

$$2 \arcsin \sqrt{\underline{p}_z} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z''}{n}} - \frac{u_{1-P_2}}{\sqrt{n}}.$$

5. M. S. Bartlett [7] benutzte Konfidenzintervalle der Form:

$$\left(\frac{1}{2}(\underline{p}+\underline{p}'), \frac{1}{2}(\overline{p}+\overline{p}')\right).$$

Dabei sind $\underline{p}$, $\overline{p}$ nach 2. berechnet worden und $\underline{p}'$, $\overline{p}'$ nach 4. HALD [16] behauptete, daß diese Werte eine gute Approximation der Intervalle von CLOPPER und PEARSON geben. Dieses kombinierte Approximationsverfahren ist in der statistischen Literatur wenig erwähnt worden. Man hat hier eine doppelte Rechenarbeit, die sich kaum für solch ein approximatives Verfahren lohnen würde.

6. Eine weniger genaue Approximation findet man in den graphischen Tafeln von KOLLER [11]. Die Tafel von KOLLER ist für einen Konfidenzkoeffizienten $\beta = 0{,}9973$ aufgestellt, kann aber auch für andere Werte von β benutzt werden. Man multipliziert dazu die angegebenen Werte mit bestimmten bei KOLLER angegebenen Faktoren.

Die Tafel ist auf folgendem Prinzip aufgebaut:

Die zufällige Größe Z ist für große n annähernd nach $N(m, s^2)$ verteilt. Dabei sind $m = np$ und $s^2 = npq$. Dann ist nach Satz 8 $\dfrac{Z-m}{s}$ nach $N(0,1)$ verteilt. Wenn große Stichproben vorliegen, ist es möglich, im Ausdruck für s den Wert p durch z/n zu approximieren. Diese grobe Approximation bedingt die Ungenauigkeit des Verfahrens. Dabei erhält man einen Wert $s'^2 = \dfrac{z(n-z)}{n}$. Dann ist $Y = \dfrac{Z-np}{s'}$ ungefähr nach $N(0,1)$ verteilt, mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $n(y)$. Es sei die Konstante k_β so bestimmt, daß

$$\int_{-K_\beta}^{K_\beta} n(y)\,dy = \beta \quad \text{ist.}$$

Dann ist

$$P\left(\text{„}\frac{z}{n} - K_\beta \frac{s'}{n} < p < \frac{z}{n} + K_\beta \frac{s'}{n}\text{“}\right)$$
$$= P\left(\text{„} - K_\beta < \frac{z-np}{s'} < K_\beta\text{“}\right)$$

ungefähr gleich β. Also erhält man Konfidenzintervalle zum Konfidenzkoeffizienten β, indem man setzt:

$$\underline{p}_z = \frac{z}{n} - K_\beta \sqrt{\frac{z(n-z)}{n^3}}$$

$$\overline{p}_z = \frac{z}{n} + K_\beta \sqrt{\frac{z(n-z)}{n^3}}.$$

Die Konfidenzgrenzen werden in der Tafel von KOLLER nicht unmittelbar abgelesen, sondern die Differenz von der beobachteten Häufigkeit z/n.

7. P. ARMITAGE hat 1958 gewisse sequentielle Verfahren zur Schätzung des Parameters p numerisch untersucht [22]. Es handelt sich hier um Stichprobenverfahren, bei denen der Stichprobenumfang am Anfang noch nicht feststeht. Dabei gibt es einen bestimmten Plan, nach dem bei jeder Stichprobe entschieden wird, ob man die Stichprobe weiterführt oder abschließt. In der Arbeit von ARMITAGE wurden drei verschiedene sequentielle Verfahren benutzt. An verschiedenen Beispielen wurden die Ergebnisse in graphischer Weise und in Tabellen dargestellt. Man bemerkt, daß die so gewonnenen Konfidenzintervalle sich bei gleichem Stichprobenumfang nur wenig von den Konfidenzintervallen von CLOPPER und PEARSON unterscheiden.

8. Im Juni 1958 veröffentlichte C. W. CLUNIES-ROSS [23] eine Arbeit über Konfidenzintervalle für den Parameter p der Binomialverteilung. Hier wird klar festgestellt, daß das Verfahren von CLOPPER und PEARSON tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit P („p liegt in einem Konfidenzintervall“; p) hat, die wesentlich höher als der Konfidenzkoeffizient β ist. Es stellt sich allerdings heraus, daß der von CLUNIES-ROSS vorgeschlagene Weg zur Aufstellung von Konfidenzintervallen sehr mühevoll ist und kaum in Betracht kommt. Da aber hier ein Versuch gemacht wurde, bessere Konfidenzintervalle zum Konfidenzkoeffizienten β zu erhalten, ist es wichtig, das Verfahren zu untersuchen.

a) CLUNIES-ROSS führt eine komplizierte Terminologie ein, um mit ihrer Hilfe ein neues Verfahren zu entwickeln. Folgende Begriffe werden eingeführt: Es sei der Konfidenzkoeffizient β und der Stichprobenumfang n fest. Mit K sei sowohl ein bestimmtes Verfahren zur Aufstellung von Konfidenzintervallen wie auch das mit dem Verfahren aufgestellte System von Konfidenzintervallen bezeichnet. Dann wird das Schätzintervall für den Parameter p mit $G(z; K)$ bezeichnet.

Dabei ist z die Anzahl der Elemente $x_m = 1$ in der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$. $G(z; K)$ kann irgendeine Menge von Werten sein und braucht vorläufig kein wirkliches Intervall zu sein. Es sei $K(t)$ die Menge aller z, in deren zugeordneten Mengen $G(z; K)$ p enthalten ist. Sie sei die Überdeckungsmenge für p beim Schätzverfahren K genannt. Es ist $z \in K(p)$ äquivalent mit $p \in G(z; K)$. $B(p; K)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß p beim Verfahren K überdeckt wird.

Also ist

$$B(p; K) = \sum_{z \in K(p)} b_z(p).$$

Es sei $k(K)$ die untere Grenze von $B(p; K)$ für alle p mit $0 \le p \le 1$.

Ist nun C das Verfahren von CLOPPER und PEARSON, so ist $k \ge \beta$, da dort verlangt wird, daß die Wahrscheinlichkeit, daß p in einem Konfidenzintervall liegt, größer oder gleich dem Konfidenzkoeffizienten β wird. Wie in III. gezeigt wird, ist in Wirklichkeit $k(C)$ wesentlich größer als β.

Es sei noch $A(p; K)$ als Menge aller Parameterwerte mit derselben Überdeckungsmenge wie p definiert. Diese Menge hat folgende Eigenschaften:

Aus $p' \in A(p''; K)$ folgt:

$$K(p') = K(p'')$$
$$A(p'; K) = A(p''; K)$$
$$p'' \in A(p'; K).$$

Diese Mengen $A(p; K)$ teilen das Intervall (0,1) in verschiedene Untermengen auf. Bei den obigen p' und p'' braucht aber keinesfalls $B(p'; K) = B(p''; K)$ zu sein.

Das Verfahren von CLUNIES-ROSS sei mit R bezeichnet. Der Unterschied zwischen dem Verfahren C und R besteht in folgender Tatsache: Es werden bei R auf Grund der Stichprobe die Mengen $K(p)$ für jedes p konstruiert, im Gegensatz zu C, wo die Mengen $G(z, C)$ bestimmt werden.

b) Jetzt wird das Verfahren R beschrieben.

R sei so definiert, daß folgende Eigenschaften gelten müssen: Die Überdeckungsmengen $K(p)$ werden so gewählt, daß (A), (B), (C) und (D) gilt, wobei jedes Element z aus $K(p)$ ein nicht verschwindendes $b_z(p)$ besitzt.

(A) Ist $r \in K(p)$ und $s \in | K(t)$, so ist $b_r(p) \ge b_s(p)$.

(B) $B(p, R)$ wird minimal für jedes p, bei $B(p, R) \ge \beta$.

(C) Ist s kleiner als jedes $r \in K(p)$ und $p' > p$ so ist s kleiner als jedes $r' \in K(p')$.

(D) Ist s größer als jedes $r' \in K(p)$ und $p' < p$ so ist s größer als jedes $r' \in K(p')$

Das Verfahren R besteht also praktisch darin, für jedes p diejenigen z zu wählen, deren Binomialwahrscheinlichkeiten $b_z(p)$ am größten sind. Man wählt so viele davon, bis

$$B(p;\, h) = \sum_{z \in K(p)} b_z(p) \geq \beta$$

wird.

Die folgenden Sätze zeigen Eigenschaften des Verfahrens R:

Satz 10

Behauptung: Für alle m ist $b_z(z/n)$ nicht kleiner als $b_m(z/n)$.

Beweis: a) Es sei $z > m$

Dann ist:

$$(n-z+1)(n-z+2)\cdots(n-m) \geq (n-m)^{z-m}$$

$$z^{z-m} \geq (m+1)(m+2)\ldots z.$$

Also gilt:

$$z^{z-m}(n-z+1)\ldots(n-m) \geq (n-z)^{z-m}(m+1)\ldots z.$$

Daraus folgt:

$$\left(\frac{z}{n}\right)^{z-m} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-z)!} \geq \left(1-\frac{z}{n}\right)^{z-m} \frac{z!}{m!},$$

und damit gilt:

$$b_z\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{n!\left(\frac{z}{n}\right)^z\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-z}}{(n-z)!\,z!} \geq \frac{n!\left(\frac{z}{n}\right)^m\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-m}}{(n-m)!\,m!} = b_m\left(\frac{z}{n}\right).$$

b) Es sei $z < m$

Dann ist:

$$(n-z)^{m-z} \geq (n-m+1)\ldots(n-z).$$

$$(z+1)\ldots m \geq z^{m-z}.$$

Also gilt:

$$\left(\frac{n-z}{n}\right)^{m-z}(z+1)\ldots m \geq \left(\frac{z}{n}\right)^{m-z} \times (n-m+1)\ldots(n-z),$$

und daraus folgt:

$$b_z\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{n!\left(\frac{z}{n}\right)^z\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-z}}{(n-z)!\,z!} \geq \frac{n!\left(\frac{z}{n}\right)^m\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-z}}{(n-m)!\,m!} = b_m\left(\frac{z}{n}\right);$$

w. z. b. w.

Satz 11

Behauptung: Für jedes z zwischen Null und n einschließlich ist die Menge $G(z;\, R)$ nicht leer.

Beweis: Zu jedem z gibt es ein p, für das $b_z(p)$ maximal wird, das heißt $b_z(p)$ größer oder gleich $b_m(p)$ für jedes m wird. Für $p = z/n$ ist dies nach Satz 10 der Fall. Dann ist $z \in K(p)$. Dies ist aber äquivalent mit $p \in G(z;\, R)$ w. z. b. w.

Satz 12

Behauptung: $G(z;\, R)$ ist für jedes z ein eigentliches Intervall.

Beweis: Aus der Definition der Überdeckungsmenge $K(p)$ folgt, daß diese beim Verfahren R eine Folge von ganzen Zahlen ist, die nacheinander in der natürlichen Reihenfolge der ganzen Zahlen folgen.

Aus (C) und (D) folgt dann unmittelbar, daß $G(z;\, R)$ ein Intervall ist. Es sei mit $(p_0(z;\, R),\, p_1(z;\, R))$ bezeichnet.

Satz 13

Behauptung: Es ist $k(R)$ gleich β.

Beweis: Es ist ja $b_0(0) = 1$, also besteht $K(0)$ nur aus der Null. Damit enthält $G(1;\, R)$ nicht mehr die Null, und es ist $p_0(1;\, R)$ größer als 0.

Es ist dann:

$A(0;\, R) = (0,\, p_0(1;\, R))$. Jetzt gilt:

$$B(p;\, R) = \sum_{z \in K(p)} b_z(p) = b_0(p) \quad \text{für} \quad p \in A(1;\, R).$$

Je größer solche p sind, um so mehr weicht $B(p;\, R) = b_0(p)$ von Eins ab, bis bei $p_0(1;\, R)$ die Zahl β überschritten wird und die Eins dann außer der Null zu $K(p)$ gehört. Für eine Folge von Parametern p_m aus $A(1;\, R)$, die gegen $p_0(1;\, R)$ konvergieren, konvergiert $B(p;\, R)$ gegen β, w. z. b. w.

Clunies-Ross versucht in seiner Arbeit die Verfahren C und R zu vergleichen. Er führt den Begriff der „Selektivität" ein. Danach wäre R selektiver als C, wenn

(1) $K(p) \in C(p)$ für alle p

oder (1′) $G(z;\, R) \in G(z;\, C)$ für alle z

und (2) $k(R)$ ist größer als $k(C)$

($C(p)$ Überdeckungsmenge bei C) gilt.

Er bemerkt, daß für die meisten Fälle R selektiver als C ist, was numerisch erkannt wurde.

9. Die arcsin-Transformation ist die Grundlage für die Benutzung des Binomialpapiers, für das viele Anwendungen in der Arbeit von Mosteller und Tukey [12] gezeigt worden sind.

Es wird der Stichprobenpunkt P: $(n-z,\, z)$ in ein System nach der Quadratwurzel geteilter x- und y-Achsen eingetragen. Dann liegt er irgendwo auf einem Viertelkreis vom Radius

$$r = [(\sqrt{n-z})^2 + (\sqrt{z})^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Der Winkel des Radius $\overline{OP}$ zur x-Achse ist gleich $\arcsin\sqrt{\frac{z}{n}}$. Wiederholte Stichproben des Umfanges n werden Punkte geben, die auf dem Viertelkreis mit dem Radius $r = \sqrt{n}$ zufällig verteilt liegen. Dies entspricht einer diskreten zufälligen Größe A, die die Werte $a = \arcsin\sqrt{\frac{z}{n}}$ mit einer Wahrscheinlichkeit $W(a;\, p) = b_z(p)$ annimmt.

Nach IV. ist A ungefähr normal verteilt für große n. Nach jenen Betrachtungen entspricht A einer zufälligen Größe $\frac{1}{2}Y$, wobei Y ungefähr nach $N\left(2\arcsin\sqrt{n}, \frac{1}{n}\right)$ verteilt ist. Es ist also die Varianz von A näherungsweise gleich $V(A) = 1/4n$, oder wenn statt A als zufällige Größe A' betrachtet wird, wobei A' die Bogenlängen $a\sqrt{n}$ annimmt, so ist $V(A') = 1/4$. Diese Eigenschaft macht es relativ leicht, Konfidenzgrenzen für den Parameter p aufzustellen. Wird nun um den Stichprobenpunkt P ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}K_\beta$ geschlagen, wobei

$$\int_{-K_\beta}^{K_\beta} n(x)\,dx \text{ gleich } \beta \text{ und } n(z)$$

die Dichte von $N(0,1)$ ist, dann werden die Tangenten $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ an den Kreis gezeichnet. P_1 sei der höher liegende Schnittpunkt. Die Halbgeraden $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ schneiden den Viertelkreis mit dem Radius $r = \sqrt{100}$ bei P_1', P_2'. Die Projektionen von P_1' und P_2' auf die y-Achse seien mit $\sqrt{\underline{p}_z}$ und $\sqrt{\overline{p}_z}$ bezeichnet. Dann ist $(\underline{p}_z,\, \overline{p}_z)$ ein approximatives Konfidenzintervall zum Konfidenzkoeffizienten β, bei gegebener Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$. Dies wird jetzt bewiesen. (Vergl. Abb. 6, S. 353).

Für große n ist die Bogenlänge l_1 die zu P_1 gehört, näherungsweise gleich $a\sqrt{n}+\frac{1}{2}K_\beta$. Für solche n sind die Kreise $r=\sqrt{n}$ im Vergleich zu den Kreisen $r=\frac{1}{2}K_\beta$ so groß, daß der Radius des kleinen Kreises gleich der Bogenlänge l_1 auf dem Kreis zwischen $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP}$ gesetzt werden kann. Genauso ist $l_2=a\sqrt{n}-\frac{1}{2}K_\beta$.

Dann ist:

$$P(\text{„}P_0 \text{ liegt zwischen } P_1 \text{ und } P_2\text{“}; p)$$
$$=P\left(\text{„}a\sqrt{n}-\frac{1}{2}K_\beta<a_0\sqrt{n}<a\sqrt{n}+\frac{1}{2}K_\beta\text{“}; p\right),$$

wobei a_0 die zu P_0 zugehörige Bogenlänge ist.

Es sei P_0' der Punkt $(100-p, p)$ auf dem Kreis $r=\sqrt{100}$. Es gilt: P („p liegt in einem Konfidenzintervall“; p) = $P(\text{„}\underline{p}_z<p<\overline{p}_z\text{“}; p)=P(\text{„}P_0' \text{ liegt zwischen } P_1' \text{ und } P_2'\text{“}; p)$
$=P(\text{„}P_0 \text{ liegt zwischen } P_1 \text{ und } P_2\text{“}; p)$,

wobei $\overline{OP_0}'$ den Kreis $r=\sqrt{n}$ im Punkt P_0 schneidet.

Dann ist

$$P(\text{„}\underline{p}_z<p<\overline{p}_z\text{“}; p)$$
$$=P\left(\text{„}a\sqrt{n}+\frac{1}{2}K_\beta<a_0\sqrt{n}<a\sqrt{n}+\frac{1}{2}K_\beta\text{“}; p\right)$$
$$=P\left(\text{„}a_0\sqrt{n}-\frac{1}{2}K_\beta<a\sqrt{n}<a_0\sqrt{n}+\frac{1}{2}K_\beta\text{“}; p\right)$$
$$=\int_{a_0\sqrt{n}-\frac{1}{2}K_\beta}^{a_0\sqrt{n}+\frac{1}{2}K_\beta}u(x)\,dx,$$

wobei $u(x)$ die Dichte von $N\left(a_0\sqrt{n}, \frac{1}{4}\right)$ ist. Nach Satz 8 folgt daraus

$$P(\text{„}\underline{p}_z<p<\overline{p}_z\text{“}; p)=\int_{K_\beta}^{K_\beta}n(y)\,dy=\beta,$$

wobei $n(y)$ die Dichte von $N(0,1)$ ist, w. z. b. w.

Für große Stichprobenumfänge n ist die Approximation recht gut, und bei entsprechend sauberer Zeichnung sind die Konfidenzintervalle mit einer in der Praxis ausreichenden Genauigkeit schnell aufgestellt. Das Binomialpapier besteht aus einem Netz, das nach Quadratwurzeln geteilt ist. Wird ein Punkt (a, b) nach der dort stehenden Einteilung eingezeichnet, so hat man in Wirklichkeit den Punkt $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ eingezeichnet. Außerdem ist der Kreis $r=\sqrt{100}$ eingezeichnet, und eine Skala, aus der mit dem Zirkel der zu β entsprechende Wert k_β ablesbar ist (den Wert k_β muß man aus einer Tafel der Sicherheitspunkte der Normalverteilung ablesen, z. B. ist $k_{0,95}=1{,}96$. Auf dem Papier liest man $\frac{1}{2}K_\beta$ im Maßstab 1:0,5 cm ab).

III. Neue verbesserte Konfidenzintervalle

Bei der bisherigen Darstellung der Verfahren zur Aufstellung von Konfidenzintervallen ist offen geblieben, wie die Verfahren zu vergleichen sind und welches am vorteilhaftesten ist. Mit der Einführung eines neuen Begriffes — der Fehlerfunktion — wird diese Frage in einfacher Weise gelöst. Im folgenden wird die Fehlerfunktion definiert und ihre Eigenschaften werden untersucht.

Zu festen Konfidenzkoeffizienten β und Stichprobenumfang n sei die Fehlerfunktion $w(p)$ eines Systems von Konfidenzintervallen als Wahrscheinlichkeit P („p liegt nicht im Konfidenzintervall“; p) definiert. $w(p)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, daß der Parameter p durch das auf Grund einer Stichprobe gewählte Konfidenzintervall des Systems nicht überdeckt wird, unter der Bedingung, daß p der wahre Parameter der Grundgesamtheit ist. Insbesondere soll jetzt die Fehlerfunktion des Verfahrens C von Clopper und Pearson betrachtet werden.

Es seien

$$\underline{p}_0<\underline{p}_1<\cdots<\underline{p}_n \quad \text{und} \quad \overline{p}_0<\overline{p}_1<\cdots<\overline{p}_n$$

die Konfidenzgrenzen beim Verfahren C, bei festen β und n. Dann ist $w(p)=P\left(\text{„}p \text{ liegt nicht in } (\underline{p}_z, \overline{p}_z)\text{“}; p\right)$ gleich

$$P(\text{„}p\geq\overline{p}_z\text{“}; p)+P(\text{„}p\leq\underline{p}_z\text{“}; p).$$

Hierbei ist zu beachten, daß z eine zufällige Größe ist.

1. Es werden erst diejenigen Parameter p betrachtet, die kleiner als die obere Grenze $\overline{p}_0$ des Konfidenzintervalls zu $z=0$ sind. Für diese Parameter p ist

$$P(\text{„}p\geq\overline{p}_z\text{“}; p)=0.$$

Es sei $\underline{p}_i$ die nahe oberhalb p liegende untere Konfidenzgrenze, so daß $\underline{p}_{i-1}<p\leq\underline{p}_i$ gilt (gibt es solch ein i nicht, so ist $p_n<p<\overline{p}_0$ also $w(p)=P(\text{„}p<\underline{p}_z\text{“}; p)=0$.)

Es ist

$$w(p)=P(\text{„}p\leq\underline{p}_z\text{“}; p)=P(\text{„}z\geq i\text{“}; p)$$
$$=\sum_{z=1}^{n}\binom{n}{z}p^z q^{n-z}=S_i(p).$$

Nach dem Ansatz (b) von Clopper und Pearson ist $S_i(\underline{p}_i)=P_2\cdot(P_1+P_2=\alpha=1-\beta)$, also wegen der Monotonie von $S_i(p)$:

$$w(p)=S_i(p)\leq S_i(\underline{p}_i)=P_2.$$

2. Ist der Parameter p größer als p_n und gibt es ein k mit $\overline{p}_{k-1}\leq p<\overline{p}_k$, so gilt:

$$w(p)=P(\text{„}p\leq\underline{p}_z\text{“}; p)+P(\text{„}p\geq\overline{p}_z\text{“}; p)=0+P(\text{„}z\leq k-1\text{“}; p$$
$$=1-S_k(p).$$

Nach dem Ansatz (a) von Clopper und Pearson ist $1-S_k(P_{k-1})=P_1$. Daraus folgt: $w(p)\leq P_1$. Gibt es kein k mit der obigen Bedeutung, so ist $\underline{p}_n<p<\overline{p}_0$, also gilt genau wie in 1.: $w(p)=0$.

3. Für diejenigen Parameterwerte p, die nicht den Bedingungen in 1. und 2. genügen, existieren immer ein i und ein k mit:

$$\underline{p}_{i-1}<p\leq\underline{p}_i$$
$$\overline{p}_{k-1}\leq p<p_k.$$

Damit ist die Fehlerfunktion gleich

$$w(p)=P(\text{„}z\leq k-1\text{“}; p)+P(\text{„}z\geq i\text{“}; p),$$

also ist $w(p)=1-S_k(p)+S_i(p)$. Genau wie in 1. und 2. gilt jetzt:

$$w(p)\leq 1-S_k(\overline{p}_{k-1})+S_i(\underline{p}_i)=P_1+P_2=\alpha \qquad (\alpha=1-\beta).$$

Es ist die Fehlerfunktion des Verfahrens C für alle möglichen Parameterwerte bestimmt worden.

A. Einseitiger Fall

Bei der Aufstellung von Konfidenzintervallen unterscheidet man den einseitigen und den zweiseitigen Fall. Beim einseitigen Problem wird nur eine Konfidenzgrenze gesucht, etwa eine obere Grenze für p. Dann ist beim Verfahren C die Konstante P_2 gleich Null zu setzen.

Man erhält dann Intervalle $(0, \bar{p}_z)$ als Schätzintervalle für p. Wird die untere Grenze gesucht, so wird $P_1 = 0$ gesetzt.

Beim einseitigen Fall hat man zur Berechnung der Grenzen die Formeln:

$$1 - S_{k+1}(\bar{p}_k) = \alpha \tag{1}$$

oder

$$S_i(p_i) = \alpha \qquad (\alpha = P_1 + P_2 = 1 - \beta), \tag{2}$$

die aus den Ansätzen (a) und (b) von Clopper und Pearson (Teil II) folgen. Die Grenze $\underline{p}_0$ ist gleich Null (Satz 5) und wird zum Intervall gezählt. Genauso wird $\bar{p}_n = 1$ zum Intervall gezählt.

Wie im Teil II gezeigt, kann man die Grenzen mit Hilfe von Tafeln der F-Verteilung berechnen. Es ist dabei:

$$\bar{p}_z = \frac{n_1 F}{n_2 + n_1 F}, \quad \text{mit} \quad \int_F^\infty g(F)\, dF = P_1,$$

wobei $g(F)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden $n_1 = 2(z+1)$ und $n_2 = 2(n-z)$ ist,

und $$\underline{p}_z = \frac{n_2}{n_2 + n_1 F}, \quad \text{wobei} \quad \int_F^\infty g(F)\, dF = P_2 \quad \text{mit}$$

den Freiheitsgraden $n_1 = 2(n-z+1)$ und $n_2 = 2z$ ist.

Mit Hilfe einer Tafel der Binomialverteilung [16] kann man für Stichprobenumfänge $n < 50$ die Grenzen leichter berechnen.

Man hat die Formeln:

$$\bar{p}_k = S_{k+1}^{-1} \quad (\beta)$$
$$\underline{p}_i = S_i^{-1} \quad (\alpha),$$

die aus (1) und (2) folgen.

Tabelle 1. Partialsummen

$$\sum_{s=r}^{n} \binom{n}{s} p^s q^{n-s}$$

$n=10\ \ r=3$	$n=10\ \ r=2$	$n=10\ \ r=1$	p
.0001138	.0042662	.0956179	.01
.0008639	.0161776	.1829272	.02
.0027650—	.0345066	.2625759	.03
.0062137	.0581538	.3351674	.04
.0115036	.0861384	.4012631	.05
.0188378	.1175880	.4613849	.06
.0283421	.1517299	.5160177	.07
.0400754	.1878825—	.5656115,	.08
.0540400	.2254471	.6105839	.09
.0701908	.2639011	.6513216	.10
.0884435—	.3027908	.6881828	.11
.1086818	.3417250—	.7214990	.12

Sie ermöglichen es, die Werte $\bar{p}_k$ oder $\underline{p}_i$ direkt in der Tafel abzulesen. In der Tafel sind die Werte $S_m(p)$ angegeben. Die p-Werte sind bis zur zweiten Dezimalstelle tabelliert, durch lineare Interpolation kann man die dritte Dezimalstelle feststellen. In der Tafel kommen nur p-Werte mit $p \leq 0{,}5$ vor. Für größere p-Werte wird mit den q-Werten weitergerechnet. Nach Satz 4 hat man dann die Formeln:

$$1 - \bar{p}_z = \bar{q}_z = S_{n-z}^{-1} \quad (\alpha)$$
$$\underline{q}_z = S_{n-z+1}^{-1} \quad (\beta)$$

Ist z. B. $n = 10$ und $\beta = 0{,}95$, erhält man aus der Tafel die untere Konfidenzgrenze für $z = 3$:

$$\underline{p}_3 = 0{,}09$$

Durch lineare Interpolation erhält man $\underline{p}_3 = 0{,}087$. Die Fehlerfunktion beim einseitigen Fall mit $\beta = 0{,}95$, $n = 10$ und $P_1 = 0$ ist im Abb. 2 graphisch dargestellt.

Die Werte p und $w(p)$ wurden in Prozenten von 1 aufgetragen.

Es ist die Fehlerfunktion $w_c(p)$ des Verfahrens von Clopper und Pearson (mit den unteren Grenzen $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$, ...) dargestellt. Außerdem ist im Bild 2 die Fehlerfunktion der im Teil VI vorgeschlagenen „mittleren" Konfidenzgrenzen eingezeichnet, die später diskutiert wird.

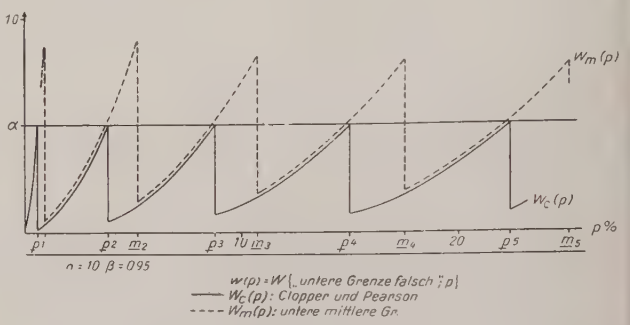


Abb. 2

B. Zweiseitiger Fall

Beim zweiseitigen Fall sind die Konstanten P_1 und P_2 größer als Null. Bei der Bestimmung der Fehlerfunktion $w(p)$ für das Verfahren C von Clopper und Pearson war festgestellt worden, daß:

$$w(p) \leq P_2 < P_1 + P_2 = \alpha \quad \text{für} \quad p < \bar{p}_0$$

und $$w(p) \leq P_1 < P_1 + P_2 = \alpha \quad \text{für} \quad p > \underline{p}_n \quad \text{ist.}$$

Da die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $w(p)$ dafür, daß ein Irrtum bei der Schätzung des Parameters p begangen wird, kleiner als die geforderte Wahrscheinlichkeit $\beta = 1 - \beta$ ist, ist das Verfahren C nicht das beste. Man kann ja mindestens ein Intervall verkürzen, z. B. das Intervall $(\underline{p}_1, \bar{p}_1)$. Aus einer Tabelle der Konfidenzintervalle nach Clopper und Pearson [21], $\left(P_i = \frac{\alpha}{2}\right)$, entnimmt man: $\underline{p}_1 < \bar{p}_0$. Dies gilt sicher für Stichprobenumfänge unterhalb 500. Wählt man eine untere Grenze $\underline{p}'_1 = S_1^{-1}(\alpha)$ statt $\underline{p}_1 = S_1^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, so ist das Intervall $(\underline{p}'_1, \bar{p}'_1)$ kürzer als $(\underline{p}_1, \bar{p}_1)$; die neue Fehlerfunktion $w'(p)$ wird dabei wegen $S_1(\underline{p}'_1) = \alpha$ nicht größer als α. Es gilt:

$$w'(p) = S_1(p) \leq \alpha \quad \text{für} \quad p \leq \underline{p}'_1$$

und $$w(p) = w'(p) \leq \alpha \quad \text{für} \quad p > \underline{p}'_1.$$

Dabei ist $w(p)$ die ursprüngliche Fehlerfunktion. Hierdurch ist die Behauptung von J. Neyman, daß das Verfahren von Clopper und Pearson nicht zu verbessern sei, widerlegt.

Ebenso wie die Intervalle für $z = 1$ kann man alle unteren Grenzen $\underline{p}_z$, $(z = 0, 1, \ldots, s)$, die kleiner als $\bar{p}_0$ sind, durch entsprechende untere Grenzen $\underline{e}_z$, die gleich $S_z^{-1}(\alpha)$ sind, ersetzen, mit Ausnahme derjenigen z, $(z = r, r+1, \ldots, s)$, für die $S_z^{-1}(\alpha) \geq \bar{p}_0$ ist. Für diese $\bar{p}_z$, $(z = r, \ldots, s)$, werden die $\underline{e}_z$ gleich $\bar{p}_0 - y$ gesetzt, bei einem sehr kleinen $y < 0$. Wegen der Monotonie von

$S_m(p)$ sind die unteren Grenzen $\underline{e}_z$ größer als die Grenzen $\underline{p}_z$ beim Verfahren C. Das neue System mit den teilweise veränderten unteren Grenzen wird mit C^{I} bezeichnet. Bildet man die Fehlerfunktion $w^{\mathrm{I}}(p)$ des Systems C^{I}, dann gilt $w^{\mathrm{I}}(p) \leq \alpha$. Es ist $w^{\mathrm{I}}(p) = w(p)$ für $p \geq \overline{p}_0$, denn diejenigen Grenzen $\underline{p}_z$, $\overline{p}_z$, die größer als $\overline{p}_0$ oder gleich $\overline{p}_0$ sind, sind nicht verändert worden. Für $p \leq \overline{p}_0 - y$ gilt, bei $\underline{e}_{i-1} < p \leq \underline{e}_i$:

$$w^{\mathrm{I}}(p) = S_i(p) \leq S_i(\underline{p}_i) = \alpha .$$

Gibt es so ein i nicht, so ist $e_n < p < \overline{p}_0$, also

$$w^{\mathrm{I}}(p) = 0 < \alpha .$$

Für

$$\overline{p}_0 - y < p < \overline{p}_0 \leq \underline{p}_{s+1} \quad \text{ist} \quad w^{\mathrm{I}}(p) = S_{s+1}(p) \leq S_{s+1}(\underline{p}_{s+1}) = \alpha .$$

Damit ist $w^{\mathrm{I}}(p) \leq \alpha$ für alle p bewiesen. In der Praxis wird man $y = 0$ setzen, da ja höchstens die dritte Dezimalstelle der Grenzen interessiert.

Genau kann man die oberen Grenzen $\overline{p}_z = S_{z+1}^{-1}(1 - P_1)$ ersetzen durch Grenzen $\bar{e}_z$, $(z = t,\ t+1,\ \ldots,\ n)$, die gleich $S_{z+1}^{-1}(\beta)$ sind, mit Ausnahme derjenigen z $(z = t,\ t+1,\ \ldots,\ u)$ mit $S_{z+1}^{-1}(\beta) \leq \underline{p}_n$, für die $\bar{e}_z$ gleich $p_n + y$ gesetzt wird.

Das System E, das aus C^{I} durch diese Ersetzung entsteht, hat eine Fehlerfunktion, die α nicht überschreitet. Dies wird ebenso wie bei C^{I} bewiesen. In der Praxis wird auch hier y gleich Null gesetzt. Das System E hat also kürzere Intervalle als das System C von Clopper und Pearson. Die Fehlerfunktion beim System C liegt tiefer als die des Systems E, deren Intervalle extremale Konfidenzintervalle genannt werden sollen.

Bei Benutzung einer Tafel der F-Verteilung [21] werden die extremalen Konfidenzintervalle nach folgendem Schema berechnet: Es sei n und β gegeben.

1. Es wird das System C von Konfidenzintervallen $(\underline{p}_z,\ \overline{p}_z)$ zum Konfidenzkoeffizienten β aufgestellt. Dies geschieht mit Hilfe einer Tafel der F-Verteilung nach den in IV. angegebenen Formeln, oder sie werden gleich aus einer Tabelle der Konfidenzintervalle [21] abgelesen.

2. Es werden die Zahlen r und t bestimmt:

$$\underline{p}_0 < \cdots < \underline{p}_{s-1} < \underline{p}_s < \overline{p}_0 \leq p_{s+1};$$
$$\overline{p}_{t-1} \leq \underline{p}_n < p_t < p_{t+1} < \cdots < \overline{p}_n .$$

3. Es werden die einseitigen Konfidenzgrenzen $\underline{p}'_i$ und $\overline{p}'_k$ zum Konfidenzkoeffizienten β berechnet $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ s;\ k = t,\ t+1,\ \ldots,\ n)$. Dies geschieht mit einer Tafel der F-Verteilung aus den Formeln in III. A.

4. Diejenigen $\underline{p}'_i$, die kleiner als $\overline{p}_0$ sind, werden gleich $\underline{e}_i$ gesetzt. Diejenigen $\overline{p}'_k$, die größer als $\underline{p}_n$ sind, werden gleich $\bar{e}_k$ gesetzt

$$(i = 0,1,\ \ldots,\ r-1;\ k = u+1,\ \ldots,\ n).$$

5. Es wird $\underline{e}_i = \overline{p}_0$ und $\bar{e}_k = \underline{p}_n$ für diejenigen i und k gesetzt, mit $i = r,\ r+1,\ \ldots,\ s$ und $k = t,\ t+1,\ \ldots,\ u$).

6. Die übrigen $\underline{e}_z$ werden gleich $\underline{p}_z$ und die übrigen $\bar{e}_z$ gleich $\overline{p}_z$ gesetzt.

Damit hat man die extremalen Konfidenzintervalle $(\underline{e}_z,\ \bar{e}_z)$ aufgestellt.

Für $n < 50$ kann man die Konfidenzgrenzen $\underline{p}_z$, $\overline{p}_z$, $\underline{p}'_z$, $\overline{p}'_z$ aus einer Tafel der Binomialverteilung [15] direkt ablesen.

Es wird anschließend nach dem Rechenschema ein Beispiel durchgerechnet: es sei $n = 10$, $\beta = 0{,}95$.

z	$\underline{p}_z$	$\overline{p}_z$
0	0,00	0,31
1	0,00	0,44
2	0,02	0,56
3	0,07	0,65
4	0,12	0,74
5	0,19	0,81
6	0,26	0,88
7	0,35	0,93
8	0,44	0,98
9	0,56	1,00
10	0,69	1,00

$s = 6,\ t = 4$

i	$\underline{e}_i$	k	$\overline{e}_k$
0	0,00	4	0,70
1	0,01	5	0,78
2	0,04	6	0,85
3	0,09	7	0,91
4	0,15	8	0,96
5	0,23	9	0,99
6	0,30	10	1,00

z	$\underline{e}_z$	$\bar{e}_z$
0	0,00	0,31
1	0,01	0,44
2	0,04	0,56
3	0,09	0,65
4	0,15	0,70
5	0,23	0,78
6	0,30	0,85
7	0,35	0,91
8	0,44	0,96
9	0,56	0,99
10	0,69	1,00

Eine weitere Verbesserung der Konfidenzintervalle

Diejenigen Konfidenzgrenzen $\underline{e}_z$, $\bar{e}_z$, die zwischen $\bar{e}_0$ und $\underline{e}_n$ liegen, sind im Verfahren E dieselben wie beim Verfahren C von Clopper und Pearson. Für $\bar{e}_0 \leq p \leq \underline{e}_n$ gilt bei

$$\underline{e}_{i-1} < p \leq e_i$$
$$\overline{e}_{k-1} \leq p < \overline{e}_k$$
$$w(p) = 1 - S_k(p) + S_i(p) \leq P_1 + P_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha ,$$

dabei ist $w(p)$ die Fehlerfunktion des Verfahrens E. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn p gleich $p_i = \overline{p}_k$ ist, also in einem äußerst seltenen Fall. Es ist also für $\bar{e}_0 \leq p \leq \underline{e}_n$ meist $w(p) < \alpha$. Verlangt ist aber $w(p) \leq \alpha$. Es ist möglich, das Verfahren E zu verbessern, indem die oberen Konfidenzgrenzen $\bar{e}_z$ mit $\bar{e}_0 < \bar{e}_z \leq \underline{e}_n$ nach links verschoben werden, ohne eine auf dem Verschiebungsweg liegende Konfidenzgrenze zu überschreiten. Es sei $\bar{e}_z$ eine obere Konfidenzgrenze des Systems E, mit $\underline{e}_{i-1} < \bar{e}_z \leq \bar{e}_i$.

Die durch eine kleine Verschiebung von $\bar{e}_z$ nach links entstandene Grenze sei $\bar{e}'_z$ genannt: $\underline{e}_{i-1} < \bar{e}'_z \leq \bar{e}_z$. Aus dem System E entsteht durch die Verschiebung ein System E' mit der Fehlerfunktion $w(p; \bar{e}'_z)$. Die Gestalt der Fehlerfunktion hängt von $\bar{e}'_z$ ab. Es gilt jetzt:

a) $w(p; \bar{e}_z)$ ist die Fehlerfunktion $w(p)$ von E.

b) $w(p; \bar{e}'_z) = w(p, \bar{e}_z)$ für $p < \bar{e}'_z < \bar{e}_z$.

c) $w(p; \bar{e}'_z) = w(p, \bar{e}_z)$ für $\bar{e}'_z < \bar{e}_z \leq p$.

d) $w(p; \bar{e}'_z) = 1 - S_{z+1}(p) + S_i(p) + S_z(p) \leq w(p)$
für $\bar{e}'_z \leq p < \bar{e}_{z+1}$. $(p \leq \underline{e}_i)$

e) $w(\bar{e}_z, \bar{e}'_z) = 1 - S_{z+1}(\bar{e}_z) + S_i(\bar{e}_z) = P_1 + S_i(\bar{e}_z)$,
also
$w(\bar{e}_z; \bar{e}'_z) \leq P_1 + S_i(e_i) = P_1 + P_2 = \alpha$,
bei $\bar{e}'_z < \bar{e}_z$.

f) Ist $1 - S_{z+1}(\bar{e}_z) + S_i(\bar{e}_z)$ kleiner als α, so gibt es wegen der Stetigkeit der Summen $S_m(p)$ im Intervall

$$\underline{e}_{i-1} + y \leq p \leq \bar{e}_z \qquad (y > 0 \quad \text{und} \quad y$$

sehr klein) einen kleinsten Wert $\bar{e}'_z$ mit $w(p) \leq \alpha$ für $\bar{e}'_z \leq p < \bar{e}_z$.

Das mit diesem $\bar{e}'_z$ gebildete System E' hat kürzere Intervalle als E, und hat eine Fehlerfunktion, die wegen b), c) und f) nicht größer als α ist. Hier wird wieder in der Praxis der Wert y gleich Null gesetzt.

Diese Verschiebungen nach links können für alle oberen Grenzen $\bar{e}_z$ mit $\bar{e}_0 < \bar{e}_z \leq \underline{e}_n$ durchgeführt werden, auch für e_0, sobald keine untere Konfidenzgrenze dabei übersprungen wird. Damit entsteht ein System E^{I}. In entsprechender Weise können dann die unteren Konfidenzgrenzen verschoben werden; aus E^{I} entsteht dabei ein System E^{II}.

Wird eine Tafel der Binomialverteilung benutzt, so kann man dieses verbesserte System aufstellen. Dem sechsten Schritt bei der Aufstellung der extremalen Konfidenzintervalle folgen die Schritte:

7. Mit $\bar{p}_0$ angefangen, werden die oberen Grenzen $\bar{e}_z$ durch die größte Nullstelle von $1 - S_{z+1}(p) + S_i(p) - \alpha = 0$ im Intervall

$$\underline{e}_{i-1} < p \leq \bar{e}_z \qquad (p > \bar{e}_{z-1})$$
$$(z = 0, 1, \ldots, t).$$

bestimmt.

Die Nullstelle wird durch probeweises Einsetzen in die Gleichung unter Benutzung der Tafel bis zur zweiten Dezimalstelle bestimmt. Mit linearer Interpolation kann die dritte Dezimalstelle bestimmt werden. Gibt es so eine Nullstelle im obigen Intervall nicht, so wird $\bar{e}'_z = \underline{e}_{i-1}$ gesetzt (die hier exakte Grenze $\bar{e}'_z = \underline{e}_{i-1} + y$ kann beliebig nahe an $\underline{e}_{i-1}$ gebracht werden).

8. Dann werden die unteren Grenzen $\underline{e}_z$, mit $\underline{e}_n$ angefangen nach oben verschoben. Bei $z = s+1, s+2, \ldots, n-1$ werden die $\underline{e}'_z$ als kleinste Nullstellen von

$$1 - S_k(p) + S_z(p) - \alpha = 0$$

in den Intervallen

$$\underline{e}_z \leq p < \bar{e}_k \qquad (p > \bar{e}_{z-1})$$

bestimmt.

Genau wie in 7. wird $\underline{e}'_z = \bar{e}_k$ gesetzt, wenn so eine Nullstelle nicht existiert. Damit sind die Intervalle $(\underline{e}'_z, \bar{e}'_z)$ des Systems E^{II} bestimmt, die kürzer sind als die Intervalle der Systeme E und C. Die Intervalle $(\underline{e}'_z, \bar{e}'_z)$ seien verbesserte extremale Konfidenzintervalle genannt.

Im Beispiel für $n = 10$, $\beta = 0{,}95$ werden die Grenzen $\bar{e}'_z$ und $\underline{e}'_z$ bestimmt, wobei für $p > 0{,}5$ die Gleichungen in p nach Satz 4 in Gleichungen in q übergehen:

$$1 - S_k(p) + S_i(p) - \alpha = S_{n-k+1}(q) + 1 - S_{n-i-1}(q) \qquad \alpha = 0.$$

Die untere Grenze $\underline{e}'_z$ findet man dadurch, daß man probeweise $\underline{e}_z$ und dann größere Werte in $w(p)$ einsetzt, bis der Wert α erreicht ist. Analog verfährt man bei den oberen Grenzen $\bar{e}'_z$. Wie man aus der Tabelle der Konfidenzgrenzen $\underline{e}_z$, $\bar{e}_z$ entnimmt, stimmen die Grenzen $\underline{e}_8$ mit $\bar{e}_1$ überein und auch $\underline{e}_9$ mit $\bar{e}_2$. Dort erreicht dann die Fehlerfunktion den Wert $\alpha = 1 - \beta = 0{,}05$, und die Grenzen können nicht weiter verändert werden. Die Grenzen $\bar{e}_0$, $\bar{e}_3$, $\underline{e}_{10}$ und $\underline{e}_7$ werden verschoben, so daß kürzere Intervalle erhalten werden.

z	i	$\bar{e}'_z$	$S_{z+1}(\bar{e}'_z)$	$1 - S_{z+1}$	$S_i(\bar{e}'_z)$	$1 - S_{z+1} + S_i$
0	7	0,31	0,976	0,024	0,012	0,036
		0,30	0,972	0,029	0,011	0,040

z	i	$\bar{e}'_z$	$\bar{q}'_z$	$S_{n-i+1}(\bar{q}'_z)$	$1 - S_{n-i+1}$	$S_{n-z}(\bar{q}'_z)$	$1 - S_{n-i+1} S_{n-z}$
3	10	0,65	0,35	0,986	0,044	0,026	0,040
		0,63	0,37	0,990	0,010	0,035	0,045
		0,62	0,38	0,991	0,009	0,041	0,050

z	k	e'	$S_k(\underline{e}'_z)$	$1 - S_k$	$S_z(\underline{e}'_z)$	$1 - S_k + Sz$
7	1	0,37	0,990	0,010	0,036	0,046
		0,38	0,992	0,008	0,041	0,049
		0,39	0,993	0,007	0,048	0,055

z	k	$\underline{e}'_z$	q'_z	$S_{n-z+1}(q'_z)$	$1 - S_{n-z+1}$	S_{n-k+1}	$1 - S_{n-z+1} + S_{n-k+1}$
10	4	0,70	0,30	0,972	0,028	0,011	0,039

Man erhält also folgende verbesserte extremale Konfidenzintervalle:

z	$\underline{e}'_z$	$\overline{e}'_z$
0	0,00	0,30
1	0,01	0,44
2	0,04	0,56
3	0,09	0,62
4	0,15	0,70
5	0,23	0,78
6	0,30	0,85
7	0,38	0,91
8	0,44	0,96
9	0,56	0,99
10	0,70	1,00

IV. Beurteilung der verschiedenen Verfahren der Intervallschätzung und Vergleich mit dem neuen Verfahren

Die Fehlerfunktion ist nicht nur ein Hilfsmittel zur Aufstellung von besseren Intervallen, sondern sie erleichtert auch wesentlich die Beurteilung der verschiedenen Verfahren.

Die Fehlerfunktion beim Verfahren C von CLOPPER und PEARSON liegt beträchtlich unterhalb α. Dies kann man in Abb. 3 erkennen. In Abb. 3 sind die Fehlerfunktionen $w_c(p)$ für die Konfidenzintervalle nach CLOPPER und PEARSON und $w_{E^{II}}(p)$ für die (verbesserten) extremalen Konfidenzintervalle dargestellt. Die Werte p und $w(p)$ sind in Prozenten von 1 aufgetragen. Man sieht, daß $w_{E^{II}}(p)$ näher an der Wahrscheinlichkeit α liegt als $w_c(p)$. Aber auch beim Verfahren E^{II} liegt die Fehlerfunktion unterhalb α, und da es so aufgestelllt wurde, daß es kürzere Intervalle als C ergibt, ist das Verfahren E^{II} dem Verfahren C vorzuziehen.

Um einen Eindruck von der Größenordnung der Verkürzung der Intervalle zu vermitteln, werden als Beispiel die Intervallängen l^z_C und $l^z_{E^{II}}$ für $n = 10$ und $\beta = 0{,}95$ gegenübergestellt und die mittleren Intervallängen $\overline{l}_c$ und $\overline{l}_{E^{II}}$ verglichen.

z	l^z_C	$l^z_{E^{II}}$
0	0,31	0,30
1	0,44	0,43
2	0,54	0,52
3	0,58	0,53
4	0,62	0,55
5	0,62	0,55
6	0,62	0,55
7	0,58	0,53
8	0,54	0,52
9	0,44	0,43
10	0,31	0,30

Die mittlere Länge $\overline{l}_C$ beim Verfahren von CLOPPER und PEARSON ist gleich 0,51, also größer als die mittlere Länge $\overline{l}_{E^{II}} = 0{,}48$ bei den extremalen Konfidenzintervallen.

Die Verfahren von MILLOT, PRIGGE, der arc sin-Transformation, die die Normalapproximation der Binomialverteilung benutzen (Grenzwertsatz von LAPLACE), beruhen alle auf einer Näherung des Ansatzes von CLOPPER und PEARSON. Ist die Approximation sehr gut, so sind die approximativen Konfidenzintervalle ungefähr so groß wie die nach CLOPPER und PEARSON, und die Fehlerfunktion wird nicht größer als α. Bei schlechterer Approximation können wohl die Intervallängen kleiner werden, z. B. beim Verfahren von PRIGGE, aber es ist nicht mehr garantiert, daß α eine obere Schranke für die Fehlerfunktion ist. Es sind also auch hier die extremalen Konfidenzintervalle vorteilhafter.

Von den sequentiellen Verfahren zur Aufstellung von Konfidenzintervallen für den Parameter p untersucht z. B. ARMITAGE mit numerischen Mitteln die Eigenschaften von drei dieser Verfahren [22]. In dieser kürzlich erschienenen Arbeit werden an Hand spezieller Beispiele auch graphische Darstellungen gebracht. Aus diesen und den numerischen Tabellen für die Konfidenzgrenzen ist zu ersehen, daß die so gewonnenen Grenzen sich bei gleichen Stichprobenumfang wenig von den Grenzen nach CLOPPER und PEARSON unterscheiden. Sie sind viel komplizierter zu berechnen, also unvorteilhafter als die Konfidenzgrenzen nach CLOPPER und PEARSON.

Beim Verfahren R von CLUNIES-ROSS werden Überdeckungsmengen $K(p)$ aufgestellt. Dies geschieht so, daß diejenigen z gewählt werden, deren Binomialwahrscheinlichkeiten $b_z(p)$ am größten sind, und zwar so viele dieser z, bis $\sum_{z \in K(p)} b_z(p)$ minimal wird, bei $\sum_{z \in K(p)} b_z(p) \geq \beta$.

Für das Verfahren R ist:

$$w(p) = P(\text{„}p \in | G(z;\ R)\text{“};\ p) = P(\text{“}z \in | K(p);\ p)$$

die Fehlerfunktion. Es gilt:

a) $w(p)$ ist nicht größer als α.

b) $w(p)$ ist nach Definition der Grenzen nach R für jedes p maximal, d. h. die Grenzen sind so gewählt, daß die Fehlerfunktion so nahe wie möglich an α liegt.

Diese Eigenschaften lassen vermuten, daß die zugehörigen Konfidenzintervalle kürzer werden als bei CLOPPER und PEARSON. Das Verfahren R ist aber kaum anwendbar. Bei festen n und β müßte für jedes p die Überdeckungsmenge $K(p)$ aufgestellt werden, und dann müßten aus den Mengen $K(p)$ die Konfidenzintervalle konstruiert werden. Es müßte also $K(p)$ für p-Werte 0,000; 0,001; 0,002, . . ., 0,999, 1,000 berechnet werden. Schon allein die Berechnung solch eines $K(p)$ ist mühsam, abgesehen von der großen Menge von p-Werten, die berücksichtigt werden müssen. Würde dies alles noch für verschiedene Konfidenzkoeffizienten β und Stichprobenumfänge n durchgeführt, so hätte man eine kaum zu bewältigende Arbeit.

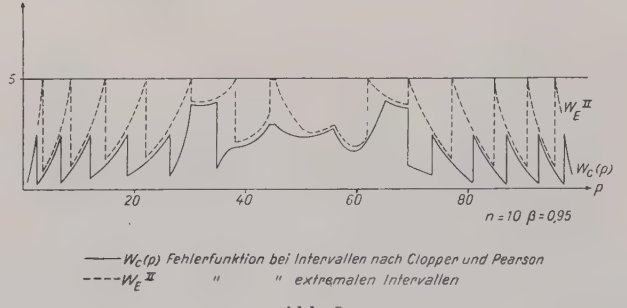


Abb. 3

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß für die praktische Anwendung und für eine endgültige Tabellierung die extremalen Konfidenzintervalle die vorteilhaftesten sind.

V. „Mittlere“ Konfidenzintervalle

In einer Arbeit, die 1952 veröffentlicht wurde, schlägt HAMAKER [17] die Aufstellung von „average confidence limits“, wie er seine Konfidenzgrenzen nannte, vor.

Er ging von folgender Betrachtung aus: Wenn laufend aus verschiedenen Grundgesamtheiten Stichproben entnommen werden und die unbekannten Häufigkeiten p durch Konfidenzintervalle geschätzt werden, ist es im allgemeinen so, daß diese Häufigkeiten p variieren. Benutzt man das Verfahren C, so stellt man Konfidenzintervalle auf, die im Mittel in weniger Fällen als $\alpha \cdot 100\%$ falsch sind, wie es in III. gezeigt wurde. Das ist mit der Zeit unbefriedigend, da man immer mit einer größeren Sicherheit operiert, als verlangt wurde. Würde man Konfidenzintervalle mit dem Verfahren C zu einem etwas kleineren Konfidenzkoeffizienten als β berechnen, so würden die Konfidenzintervalle kürzer ausfallen, und die Sicherheit würde trotzdem nicht kleiner als β sein. Wie groß aber dieser kleinere Konfidenzkoeffizient zu wählen ist, das ist allgemein unmöglich zu entscheiden.

Hamaker schlug vor, Konfidenzintervalle so aufzustellen, daß die Sicherheit P („p liegt in einem Konfidenzintervall"; p) im Mittel gleich dem geforderten β ist, wobei also im Laufe der Schätzungen die Häufigkeit falscher Schätzungen angenähert gleich $\alpha \cdot 100\%$ wird.

Er geht folgendermaßen vor: Es seien $\underline{p}_z$, $\overline{p}_z$ die Konfidenzgrenzen nach Clopper und Pearson, und

$$\underline{a}_z = \frac{\underline{p}_z + \underline{p}_{z+1}}{2}$$

$$\overline{a}_z = \frac{\overline{p}_{z-1} + \overline{p}_z}{2}$$

$$\overline{a}_0 = \frac{\overline{a}_1}{2}, \quad \underline{a}_n = \frac{1 + \underline{a}_{n-1}}{2}, \quad \underline{a}_0 = 0, \quad \overline{a}_n = 1.$$

Dann sind $\underline{a}_m$, $\overline{a}_m$ die „average confidence limits" von Hamaker. Sind die $\underline{p}_z$, $\overline{p}_z$ Konfidenzgrenzen zum Konfidenzkoeffizienten β, so schwankt bei den Konfidenzintervallen von Hamaker die Wahrscheinlichkeit $1 - w(p)$ um β.

Aber die Abweichungen von β können sehr beträchtlich sein, so kann es vorkommen, daß bei bestimmten Parametergrößen die Wahrscheinlichkeit $w(p)$, einen Fehler zu begehen, sehr groß wird. Bei $n = 10$ wird berechnet (siehe IV.), daß bei einem Konfidenzkoeffizienten $\beta = 0{,}95$ für $p = \overline{a}_0$ die Fehlerfunktion größer wird als 0,13. Also ist diese Art von Konfidenzintervallen wenig zuverlässig, und es erhebt sich die Frage, ob es wirklich gute Konfidenzintervalle gibt, deren Fehlerfunktion um α schwankt. Solche Konfidenzintervalle seien mittlere Konfidenzintervalle genannt.

VI. Aufstellung von optimalen mittleren Konfidenzintervallen

Jetzt wird mit Hilfe der Fehlerfunktion untersucht, welchen Bedingungen das beste mittlere Verfahren genügen muß. Die durch dieses neue Verfahren gewonnenen Konfidenzintervalle sollen optimale mittlere Konfidenzintervalle genannt werden.

Auch hier muß zwischen einseitigem und zweiseitigem Fall unterschieden werden.

a) Einseitige Fragestellung

Wenn die Konfidenzgrenze $\overline{m}_z$ zwischen $\overline{p}_{z-1}$ und $\overline{p}_z$ liegt, so wird $w(p)$ ungefähr um α schwanken, wie es in Abb. 2 am Beispiel mit $n = 10$ und $\beta = 0{,}95$ veranschaulicht ist.

Bei mittleren Konfidenzintervallen verzichtet man darauf, daß α eine obere Schranke für die Fehlerfunktion ist. Dann kann man die oberen Konfidenzgrenzen von Clopper und Pearson verkleinern. Es darf dabei aber keine zu große Abweichung der Fehlerfunktion oberhalb α vorkommen, da sonst die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Schätzung zu machen, zu klein wird.

Es sei $A(w, \alpha) = \text{supremum von } |w(p) - \alpha|$ der Tschebyschewsche Abstand $(0 \leq p \leq 1)$.

Dann ist einleuchtend, die Eigenschaften der optimalen, mittleren oberen Grenzen so zu formulieren:

(1) $A(w, \alpha)$ sei minimal für $p \in i_z$ bei jedem

$$i_z = (\overline{p}_{z-1}, \overline{p}_z), \quad (z = 1, 2, \ldots, n-1).$$

(2) Die Grenzen seien einfach zu berechnen.

Jetzt werden die Formeln für die oberen Grenzen $\overline{m}_z$ aufgestellt. Nach (1) muß

$$\sup_{p \in i_z} |w(p) - \alpha| = \sup \left\{ \sup_{p \in i_z'} |w(p) - \alpha|; \sup_{p \in i_z''} |w(p) - \alpha| \right\}$$

minimal sein, wobei $i_z' = (\overline{p}_{z-1}, \overline{m}_z)$ und $i'' = (\overline{m}_z, \overline{p}_z)$ ist. Also gilt:

$$\sup \{\alpha - [1 - S_z(\overline{m}_z)];\ 1 - S_{z+1}(\overline{m}_z) - \alpha\}$$

ist minimal.

Daraus folgt aber, daß

$$\alpha - 1 + S_z(\overline{m}_z) = 1 - S_{z+1}(\overline{m}_z) - \alpha$$

sein muß.

Es gilt dann:

$$\overline{m}_z = S_z^{-1}\{2(1-\alpha) - S_{z-1}(\overline{m}_z)\}.$$

So ein $\overline{m}_z$ existiert immer und ist eindeutig bestimmt.

Das wird jetzt bewiesen.

$S_z(p)$ ist monoton wachsend, stetig in p.

Aus:

$$S_z(\overline{p}_{z-1}) + S_{z+1}(\overline{p}_{z-1}) = \beta + S_{z+1}(\overline{p}_{z-1}) < \beta + S_z(\overline{p}_{z-1}) = 2\beta$$

und $\quad S_z(\overline{p}_z) + S_{z+1}(\overline{p}_z) = S_z(\overline{p}_z) + \beta > S_{z+1}(\overline{p}_z) + \beta = 2\beta$

$(z = 1,\ 2 \ldots n-1)$ folgt, daß es eine Zwischenstelle $\overline{m}_z$ mit $S_z(\overline{m}_z) + S_{z+1}(\overline{m}_z) = 2\beta$ gibt. Wegen Satz 3 ist der Ausdruck $S_z(p) + S_{z+1}(p) - 2\beta$ monoton wachsend, kann also nur eine Nullstelle haben.

Für $\overline{m}_0$ wird folgerichtig gefordert, daß die Abweichung von α genauso groß wie bei $\overline{m}_1$ wird:

$$w(\overline{m}_0) - \alpha = \alpha - w(\overline{m}_1)$$

(siehe Abb. 2). Daraus folgt:

$$\overline{m}_0 = S_1^{-1}\{2\beta - S_1(\overline{m}_1)\}.$$

Wie im Satz 5 schon bewiesen, muß $\overline{m}_n = 1$ sein.

Für die besten mittleren unteren Grenzen wird genauso gefordert:

(1) $A(w, \alpha)$ minimal für $p \in i_z$,
bei jedem $i_z = (\underline{p}_z, \overline{p}_{z+1})$, $\quad (z = 1, 2, \ldots, n-1)$.

(2) Die Grenzen seien einfach zu berechnen.

Nach (1) ist dann, wie oben,

$$\sup \left\{ \sup_{p \in i_z'} |w(p) - \alpha|; \sup_{p \in i_z''} |w(p) - \alpha| \right\}$$

minimal, wobei $i_z' = (\underline{p}_z, \underline{m}_z)$ und $i_z'' = (\underline{m}_z, \underline{p}_{z+1})$ ist. Daraus folgt:

$$S_z(\underline{m}_z) - \alpha = \alpha - S_{z+1}(\underline{m}_z).$$

Genau wie bei $\overline{m}_0$ erhält man für $\underline{m}_n$ die Formel:

$$\underline{m}_n = S_n^{-1}\{2\alpha - S_n(\underline{m}_{n-1})\}.$$

Als Formeln für die mittleren Konfidenzgrenzen bei einseitiger Fragestellung erhält man also:

$$\overline{m}_z = S_z^{-1}\{2\beta - S_{z+1}(\overline{m}_z)\} \qquad 1 \le z \le n-1$$
$$\underline{m}_z = S_z^{-1}\{2\alpha - S_{z+1}(\underline{m}_z)\} \qquad 1 \le z \le n-1$$
$$\overline{m}_0 = S_1^{-1}\{2\beta - S_1(\overline{m}_0)\}$$
$$\underline{m}_n = S_n^{-1}\{2\alpha - S_n(\underline{m}_{n-1})\}$$
$$\overline{m}_n = 1$$
$$\underline{m}_0 = 0.$$

Eigenschaften der optimalen mittleren Konfidenzgrenzen

Die optimalen mittleren Konfidenzintervalle haben die Eigenschaften (1): Die Abweichung der Fehlerfunktion von α ist minimal und (2): Die Grenzen lassen sich leicht mit Hilfe einer Tafel der Binomialverteilung [15] durch probeweises Einsetzen in die Formeln bestimmen. Sie haben außerdem folgende, in der Praxis sehr wichtige Eigenschaften:

Satz 14

Die Fehlerfunktion bleibt auch im Falle einer Grundgesamtheit mit „ungünstigstem" Parameter p kleiner als 2α.

Beweis:

Die größten Werte von $w(p)$ liegen an den Stellen $\overline{m}_z$, wenn $w(p)$ die Fehlerfunktion bei dem Problem der oberen Grenzen ist. Dort ist aber:

$$w(\overline{m}_z) = 1 - S_{z+1}(\overline{m}_z) = 2\alpha - [1 - S_z(\overline{m}_z)] < 2\alpha.$$

Bei den unteren Grenzen gilt:

$$w(\underline{m}_z) = S_z(\underline{m}_z) = 2\alpha - S_{z+1}(\underline{m}_z) < 2\alpha,$$

w. z. b. w.

Wenn also beschlossen wird, mit mittleren Konfidenzgrenzen zu arbeiten, hat man mit zwei Tatsachen zu rechnen: Erstens schwankt die Sicherheit P („p liegt in einem Konfidenzintervall"; p) um den Konfidenzkoeffizienten β, und zweitens ist die Sicherheit in jedem Fall größer als $\beta - \alpha$. Dabei ist die Schwankung der Sicherheit so, daß die Abweichung von β minimal bleibt.

Daß die neuen mittleren Konfidenzgrenzen optimal sind, bekräftigt der folgende Satz.

Satz 15

Wird verlangt, daß der mittlere Abstand

$$\int_0^1 |w(p) - \alpha|\, dp$$

minimal wird, so erhält man dieselben Grenzen $\underline{m}_z$ und $\overline{m}_z$, unter der Annahme, daß $\overline{m}_0$, $\underline{m}_0$, $\overline{m}_n$, $\underline{m}_n$ in bestimmter Weise festgelegt sind.

Beweis: 1. Obere Grenzen.

Es muß notwendig

$$\frac{d}{d\overline{m}_z}\int_0^1 |w(p) - \alpha|\, dp = 0 \qquad \text{sein.}$$

$(z = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$.

Es ist:

$$\int_0^1 |w(p) - \alpha|\, dp = \int_0^{\overline{m}_0} |w(p) - \alpha|\, dp + \int_{\overline{m}_0}^{\overline{m}_1} |w(p) - \alpha|\, dp + \int_{\overline{m}_1}^{\overline{p}_1} |w(p) - \alpha|\, dp + \int_{p_1}^{\overline{m}_2} |w(p) - \alpha|\, dp + \cdots$$

Daraus folgt aus obiger Forderung:

$$1 - S_1(\overline{m}_1) - \alpha + [1 - S_2(\overline{m}_1) - \alpha] = 0; \quad 1 - S_2(\overline{m}_2) - \alpha + [1 - S_3(\overline{m}_2) - \alpha] = 0; \quad \text{usw.}$$

Dies sind aber dann die Formeln:

$$\overline{m}_z = S_z^{-1}\{2\beta - S_{z+1}(\overline{m}_z)\}$$

für die mittleren Konfidenzgrenzen.

2. Untere Grenzen.

Es muß

$$\frac{d}{d\underline{m}_z}\int_0^1 |w(p) - \alpha|\, dp = 0$$

sein.

Es ist:

$$\int_0^1 |w(p) - \alpha|\, dp = \int_0^{\underline{m}_1} |S_1(p) - \alpha|\, dp + \int_{p_2}^{m_1} |S_n(p) - \alpha|\, dp + \int_{m_1}^{m_2} |S_2(p) - \alpha|\, dp + \int_{m_2}^{p_3} |S_2(p) - \alpha|\, dp + \cdots$$

Daraus folgen wie oben die Formeln für die unteren mittleren Konfidenzgrenzen:

$$\underline{m}_z = S_z^{-1}(2\alpha - S_{z+1}(\underline{m}_z)).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Die mittleren Grenzen können durch probeweises Einsetzen in die Formeln bestimmt werden.

Für das Beispiel $n = 10$, $\beta = 0{,}95$ sei gezeigt, wie man die Grenzen berechnet.

$$2\beta = 1{,}900$$

z	$\overline{m}_z$	$S_{z+1}(\overline{m}_z)$	$2\beta - S_{z+1}$	S_z^{-1}	$(2\beta - S_{z+1})$
1	0,40	0,953	0,947		0,26
	0,33	0,891	1,009		
	0,35	0,914	0,986		
2	0,50	0,945	0,955		0,40
	0,45	0,900	1,000		
	0,47	0,920	0,980		0,47
0	$\overline{m}_1$	$S_1(\overline{m}_1)$	$2\beta - S_1$	S_1^{-1}	$(2\beta - S_1)$
	0,35	0,987	0,913		**0,22**

Nach Satz 4 geht die Formel für $\overline{m}_z$ über in die Formel

$$\overline{q}_z = S_{n-z}^{-1}\{2\alpha \quad S_{n-z+1}(\overline{q}_z)\}, \quad \overline{q}_z = 1 - \overline{m}_z.$$

$$(2\alpha = 0{,}1)$$

z	$\overline{m}_z$	$\overline{q}_z$	$S_{n-z+1}(\overline{q}_z)$	$2\alpha - S_{n-z+1}$	$S_{n-z}^{-1}(2\alpha - S_{n-z+1}$
3	**0,57**	0,43	0,020	0,080	0,43
4	0,67	0,33	0,019	0,081	0,34
	0,66	**0,34**	0,022	0,078	0,34
5	0,76	0,24	0,016	0,084	0,26
	0,75	**0,25**	0,020	0,080	0,25

z	$\underline{m}_z$	$S_{z+1}(\overline{m}_z)$	$2\alpha - S_{z+1}$	$S_z^{-1}(2\alpha - S_{z+1})$
0	0,00			
1	**0,01**	0,002	0'069	0,01
2	0,04	0,006	0,094	0,05
	0,05	0,012	0,088	0,05
3	0,10	0,013	0,087	0,11
	0,11	0,018	0,082	0,11
4	0,17	0,017	0,083	0,18
	0,18	0,021	0,079	0,17
	0,17			
5	2,50	0,020	0,080	0,25

Es ist $\underline{m}_z = 1 - \overline{m}_{n-z}$, wie sich aus den Formeln durch Anwendung des Satzes 4 ergibt. Deshalb genügt es, die Grenzen bis zu $z = 5$ zu berechnen.

z	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	0,00	0,22
1	0,01	0,35
2	0,05	0,47
3	0,11	0,57
4	0,17	0,66
5	0,25	0,75
6	0,34	0,83
7	0,43	0,89
8	0,53	0,95
9	0,65	0,99
10	0,78	1,00

b) Zweiseitige Fragestellung

Zur Aufstellung der mittleren Konfidenzintervalle geht man analog wie beim Verfahren E vor. Es seien $\underline{m}'_z$, $\overline{m}'_z$ die mittleren Konfidenzgrenzen zu $\frac{\alpha}{2}$ im einseitigen Fall. Für die Grenzen $\underline{m}'_z$, die unterhalb $\overline{m}'_0$ liegen, werden Konfidenzgrenzen $\underline{m}_z$ zu α berechnet ($z = 0, 1, 2, \ldots, s$). Statt der Grenzen $\overline{m}'_z$, die größer als $\underline{m}'_n$ sind, werden Grenzen $\overline{m}_z$ zu α berechnet ($z = t, t+1, \ldots, n$).

Genau wie bei den extremalen Konfidenzintervallen werden diejenigen $\underline{m}_z$, die nicht kleiner als $\overline{m}'_0$ ausfallen, gleich $\overline{m}'_0$ gesetzt ($z = r, r+1, \ldots, s$). Für diejenigen $\overline{m}_z$, die nicht größer als $\underline{m}'_n$ sind, wird $\overline{m}_z = \underline{m}'_n$ gewählt ($z = t, t+1, \ldots, u$). An den Enden $(0, \overline{m}'_0)$, $(\underline{m}'_n, 1)$ ist die Fehlerfunktion $w(p)$ so, daß sie um α schwankt, wobei die Abweichung minimal bleibt.

Für die übrigen p ist $w(p) = P$ („untere Grenze falsch"; p) $+ P$ („obere Grenze falsch"; p).

Beide Glieder schwanken um $\frac{\alpha}{2}$, also schwankt $w(p)$ um α.

Ist bei den gewonnenen Grenzen $\underline{m}_z$, $\overline{m}_z$: $\overline{m}_i < \underline{m}_k$, wobei die Differenz $\underline{m}_k - \overline{m}_i$ klein ist (z. B. kleiner als 0,01), so ist die Fehlerfunktion an den Stellen $\overline{m}_i \leq p \leq \underline{m}_k$ groß, im Vergleich zu anderen Stellen, da $1 - S_i(p)$ an der Stelle $\overline{m}_1$ und $S_k(p)$ an der Stelle $\underline{m}_k$ ihre relativen Maxima erreichen und $w(p) = 1 - S_i(p) + S_k(p)$ ist. Durch Verschieben der oberen Grenze nach rechts und von $\underline{m}_k$ nach links, bis $\overline{m}_i > \underline{m}_k$ wird, erreicht man ein verändertes Verhalten von $w(p)$. Es ist jetzt an dieser Stelle p zwischen den beiden Grenzen $w(p) = 1 - S_{i-1}(p) + S_{k+1}(p)$ sehr klein, wie man aus dem Verlauf der Fehlerfunktionen beim einseitigen Fall entnimmt. Damit ist ein zu großer Fehler an dieser Stelle vermieden.

Praktisch werden beide Grenzen gleich gesetzt.

Bei obiger Bedeutung von s, r, t und u gilt:

$$
\begin{array}{lll}
\overline{m}_z = S_z^{-1}\{1+\beta - S_{z+1}(\overline{m}_z)\} & z = 1, 2, \ldots, t-1 & \\
\underline{m}_z = S_z^{-1}\{\alpha - S_{z+1}(\underline{m}_z)\} & z = s+1, s+2, \ldots, n-1 & \\
\overline{m}_z = S_z^{-1}\{2\beta - S_{z+1}(\overline{m}_z)\} & z = u+1, u+2, \ldots, n-1 & \\
\underline{m}_z = S_z^{-1}\{2\alpha - S_{z+1}(\underline{m}_k)\} & z = 1, 2, \ldots, r-1 & \\
\overline{m}_0 = S_1^{-1}\{1+\beta - S_1(\overline{m}_1)\} & \overline{m}_n = 1 & \\
\underline{m}_n = S^{-1}\{\alpha - S_n(\underline{m}_{n-1})\} & \underline{m}_0 = 0 & \text{und} \\
\overline{m}_z = \underline{m}_n & z = t, t+1, \ldots, u & \\
\underline{m}_z = \overline{m}_0 & z = r, r+1, \ldots, s &
\end{array}
$$

Eigenschaften der mittleren Konfidenzintervalle

Es gilt auch hier wie bei der einseitigen Fragestellung der wichtige Satz:

Satz 16: Die Fehlerfunktion ist immer kleiner als 2α.

Beweis:

Für p kleiner als $\overline{m}_0$ ist $w(p) = P$ („obere Grenze ist falsch"; p) $+ P$ („untere Grenze ist falsch"; p) $= P$ („untere Grenze ist falsch"; p).

Nach dem Satz bei dem einseitigen Fall ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 2α.

Für p-Werte, die größer als $\underline{m}_n$ sind, gilt genauso $w(p) = P$ („obere Grenze ist falsch"; p). Damit ist auch hier die Fehlerfunktion kleiner als 2α. Sonst ist es aber so, daß die Grenzen zum Konfidenzkoeffizienten $1 - \frac{\alpha}{2}$ gewählt wurden, es sind also beide Glieder von $w(p)$ nicht größer als α, nach dem Satz für den einseitigen Fall, w. z. b. w.

Also ist auch im ungünstigsten Fall die Sicherheit größer als $\beta - \alpha$.

VII. Graphischer und numerischer Vergleich der mittleren Konfidenzintervalle mit den anderen Intervallschätzungen

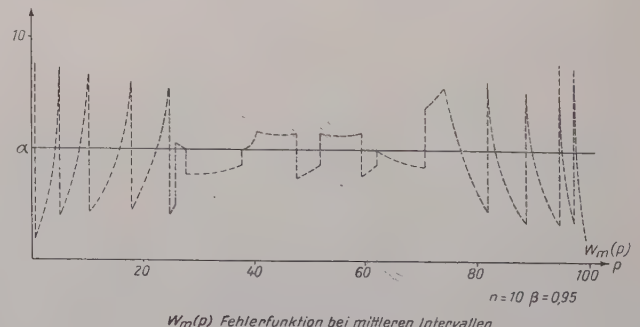
Für $n = 10$ und $\beta = 0{,}95$ berechnet man folgende mittlere Konfidenzgrenzen:

Im Beispiel $n = 10$, $\beta = 0{,}95$ wird:

z	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	0,00	0,27
1	0,01	0,40
2	0,05	0,52
3	0,11	0,62
4	0,17	0,71
5	0,25	0,75
6	0,29	0,83
7	0,38	0,89
8	0,48	0,95
9	0,60	0,99
10	0,73	1,00

Die Fehlerfunktion zu diesen Konfidenzintervallen ist in Abb. 4 dargestellt.

Man kann den Längenunterschied zwischen den mittleren und den Konfidenzintervallen nach Clopper und Pearson in Abb. 5 erkennen. In Abb. 5 werden diese Intervalle graphisch dargestellt. Wird eine Horizontale in der Höhe $100 \cdot \frac{z}{n}$ gezogen, so grenzen die Schnittpunkte mit den entsprechenden Kurven die gesuchten Intervalle für $n = 10$ und $\beta = 0{,}95$ ab.



$w_m(p)$ Fehlerfunktion bei mittleren Intervallen

Abb. 4

Aus der Tabelle errechnet man für das Beispiel eine mittlere Länge $\bar{l}_m = 0{,}44$. Es können die mittleren Längen der Konfidenzintervalle verschiedener Verfahren verglichen werden.

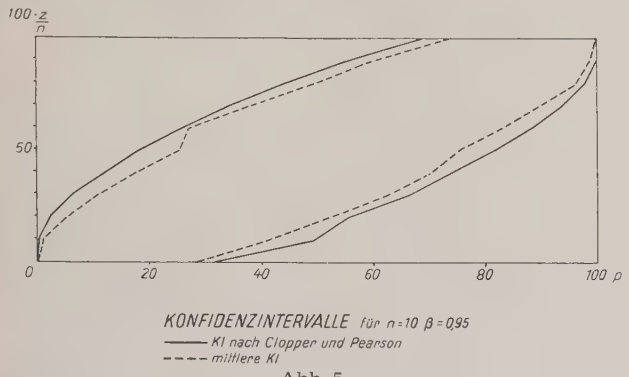


Abb. 5

Es ist:

$$\bar{l}_m = 0{,}44$$
$$\bar{l}_E{}^{\text{II}} = 0{,}47$$
$$\bar{l}_E = 0{,}48$$
$$\bar{l}_c = 0{,}51$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß die mittleren Konfidenzintervalle die kürzesten Intervalle sind, wobei man nicht streng verlangt, daß β eine untere Schranke für die Sicherheit ist.

VIII. Anwendungen in Wirtschaft und Wissenschaft

Um die große Bedeutung der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Schätzintervalle zu zeigen, sollen jetzt verschiedenartige Anwendungsmöglichkeiten in der Praxis untersucht werden. Dem Praktiker können diese Beispiele Anregung geben, mehr als bisher bei ähnlichen Problemen exakte statistische Methoden anzuwenden. Jedes der nachfolgenden Beispiele ist charakteristisch für eine ganze Klasse gleichartiger Probleme. Die Schätzung des Parameters der Binomialverteilung ist immer dann erforderlich, wenn die Häufigkeit eines Merkmals bei den Elementen einer bestimmten Menge gesucht wird.

Wesentlich ist, daß die betrachtete Grundgesamtheit sehr groß ist, denn bei endlichen Mengen müßte man bei Stichproben ohne Zurücklegen mit der hypergeometrischen Verteilung rechnen. Hat aber die endliche Menge eine (relativ zum Stichprobenumfang) sehr große Anzahl von Elementen, so approximiert die Binomialverteilung die hypergeometrische Verteilung, denn sie ist die Grenzverteilung der hypergeometrischen Verteilung bei unendlicher Grundgesamtheit. Bevor eine Häufigkeit geschätzt wird, muß festgestellt werden, mit welchen Konfidenzkoeffizienten β und mit welcher Art von Konfidenzintervallen geschätzt werden soll.

In der Biologie und in der Medizin wird mit $\beta = 0{,}99$ gearbeitet. Ebenso wird man auf anderen Gebieten, bei denen 5% falsche Schätzungen ein zu großes Risiko bedeuten, $\beta = 0{,}99$ bevorzugen. Aus dem gleichen Grund wird man nicht mittlere Konfidenzintervalle benutzen, sondern extremale Konfidenzintervalle, bei denen die Sicherheit mindestens 0,99 beträgt. In Fällen, bei denen man eine sehr große Sicherheit fordert und $\beta = 0{,}999$ setzt, muß man sich mit größeren Schätzintervallen begnügen.

Bei Problemen aus der Industrie und aus der Landwirtschaft kann man meistens $\beta = 0{,}95$ setzen. Man schätzt am besten mit mittleren Konfidenzintervallen, bei denen im Mittel 5% falsche Schätzungen vorkommen, wobei aber die Sicherheit garantiert größer als 0,90 ist.

Als Anhang zu dieser Arbeit wurden Tabellen von Konfidenzintervallen für verschiedene Stichprobenumfänge und Konfidenzkoeffizienten berechnet. Zu $\beta = 0{,}95$ werden mittlere Konfidenzintervalle für Stichprobenumfänge n von 5 bis 49 angegeben. Für mehrere größere n sind zum gleichen Konfidenzkoeffizienten extremale Konfidenzintervalle angegeben. Für $n \geq 50$ und $\beta = 0{,}95$ wird man also extremale Konfidenzintervalle benutzen, mit einem wahrscheinlichen Prozentsatz von Irrtümern, der kleiner als 5% ist. Für $\beta = 0{,}99$ sind extremale Konfidenzintervalle angegeben, für n von 5 bis 50 und für mehrere größere Stichprobenumfänge.

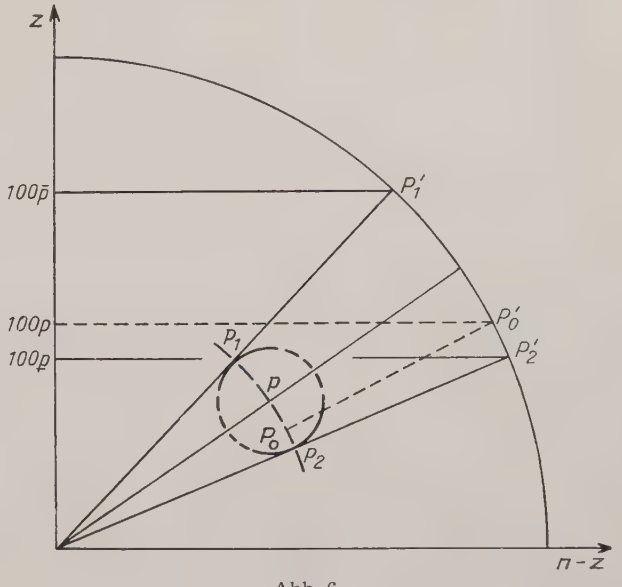


Abb. 6

Für größere Stichproben (und auch für größere Sicherheiten) werden die Verbesserungen durch die extremalen Intervalle immer geringer. Bei $\beta = 0{,}99$ und $n = 500$ macht sich die Verbesserung nur noch in wenigen Einheiten der dritten Dezimalstelle bemerkbar. Hat man große Stichprobenumfänge, die nicht in den Tabellen vorkommen, so könnte man interpolieren. In diesem Fall ist es am vorteilhaftesten, mit dem Binomialpapier approximative Konfidenzintervalle aufzustellen.

In den Tabellen für die extremalen Konfidenzintervalle wurden zuerst nicht alle oberen Grenzen nach Clopper und Pearson verbessert, sondern nur diejenigen, die 0,5 nicht überschreiten. Dann wurden alle unteren Grenzen verbessert und zuletzt die übrigen oberen Grenzen.

Bei seltenen Merkmalen ist die Häufigkeit p sehr klein, und bei sehr großem Stichprobenumfang n genügt die Anzahl z der Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal besitzen, ungefähr der Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert $\lambda = np$ (Satz von Poisson [20]).

In diesem Fall kann man analog zur Binomialverteilung auch extremale Konfidenzintervalle $(\underline{\lambda}_z, \bar{\lambda}_z)$ für den Erwartungswert λ aufstellen, die dann kürzer als die üblichen Konfidenzintervalle werden (18). Man erhält also folgende Formeln für die Konfidenzintervalle $(\underline{\lambda}_z, \bar{\lambda}_z)$ zum Konfidenzkoeffizienten β:

Es sei [10] $$P_z(p) = \sum_{x=z}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$\bar{\lambda}_z = P_{z+1}^{-1}(\beta)$$

$$\underline{\lambda}_z = P_z^{-1}(1-\beta) \quad (\text{wenn } P_z^{-1}(1-\beta) \leq P_1^{-1}(\beta) = \bar{\lambda}_0 \text{ ist})$$

sonst $\underline{\lambda}_z = P_z^{-1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right)$ $\left(\text{ist hier } P_z^{-1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right) < \bar{\lambda}_0,\right.$

$\left.\text{so wird } \underline{\lambda}_z = \bar{\lambda}_0 \text{ gesetzt}\right)$

Im Anhang sind diese Konfidenzintervalle zu den Konfidenzkoeffizienten $\beta = 0{,}95$ und $\beta = 0{,}99$ tabelliert.

Im folgenden werden einige Beispiele aus der Praxis gebracht.

Beispiel 1: Nachfrage nach Fernsehersatzteilen

Ein Werk, das einen bestimmten Typ von Fernsehapparaten herstellt, muß einen Überblick über die Nachfrage nach Ersatzröhren (oder auch Schaltungsvorrichtungen usw.) haben. Es ist also die Anzahl a_i der gefragten Röhren vom Typ R_i pro hundert verkaufter Apparate gesucht (die betrachtete Zeitspanne umfasse ein Jahr vom Verkaufstag an gerechnet). Bei 45 Seriemodellen, die schon vor einem Jahr verkauft wurden, wurde festgestellt, daß es folgende Nachfragen gab:

3 Röhren vom Typ R_1

2 Röhren vom Typ R_2

0 Röhren vom Typ R_3

1 Röhre vom Typ R_4.

Gesucht ist eine obere Schranke für die Nachfrage nach den Röhren der verschiedenen Typen, um den benötigten Ersatz herzustellen. Ebenso interessiert eine untere Schranke, um die eventuell nicht absetzbaren Ersatzteile einzukalkulieren. Man gibt also mittlere Konfidenzintervalle zu $\beta = 0{,}95$ für die Zahlen a_i an:

$$2{,}2 < a_1 < 17{,}1$$
$$1{,}1 < a_2 < 14{,}0$$
$$0{,}0 < a_3 < 6{,}8$$
$$0{,}2 < a_4 < 10{,}6.$$

Genauso schätzt man die Anzahl der verschiedenen benötigten Ersatzteile.

Beispiel 2:

Sicherheit einer Strahlenschutzmethode

Es ist zu beurteilen, wie sicher eine Schutzmethode gegen Strahlungen ist. Es sind 20 Vorrichtungen in einem bestimmten Zeitabschnitt benutzt worden, und in keinem Fall hat man eine gefährliche Strahlungsdosis gemessen. Es erhebt sich die Frage, bei wieviel der Schutzvorrichtungen doch die vorgeschriebene Strahlungsdosis überschritten wird. Nimmt man einen Konfidenzkoeffizienten von 0,99, so kann man schätzen, daß die Vorrichtung in mindestens 76,7% der Fälle sicher sein wird. Möchte man feststellen, ob eine Schutzmethode in mindestens 99% der Fälle sicher ist, so müssen mehr als 500 Fälle beobachtet worden sein, in denen niemals eine Dosisüberschreitung vorkommt. Bei $n = 500$ ist der Prozentsatz sicherer Fälle durch die untere Konfidenzgrenze 98,9% begrenzt.

Beispiel 3:

Kolbenringbruch bei Kraftfahrzeugen

Ein Werk will Lastwagen serienmäßig herstellen und hat 50 Serienwagen mit Höchstbelastung erprobt. Es ergab sich, daß bei den ersten 5000 km drei dieser Lastwagen einen Kolbenringbruch hatten. Das Werk will die Wagen mit einer Garantie über die ersten 5000 km verkaufen. Wieviel Kolbenringe das Werk je hundert Lastwagen ungefähr ersetzen wird, ist ein Problem, das vorher untersucht werden muß.

Wird angenommen, daß ein ersetzter Kolbenring nicht wieder defekt ist, so ist es möglich, ein extremales Konfidenzintervall zum Konfidenzkoeffizienten 0,95 aufzustellen. In der Industrie reicht normalerweise eine Sicherheit von 95% aus. Da der Betrieb eine Entscheidung über die Produktion von zusätzlichen Kolbenringen, über Gewinne und Materialbeschaffung zu fällen hat, wird eine Sicherheit gewählt, die auch garantiert größer oder gleich 95% ist, also werden extremale Konfidenzintervalle benutzt (ähnliche Schätzintervalle können für andere Defektursachen bei den neuen Wagen aufgestellt werden). Es liegt die Häufigkeit im Intervall: (1,16).

Ist nur eine obere Schranke gesucht, so erhält man ein Intervall (0,15). Es wird also nötig sein, 15% Ersatzkolbenringe zu produzieren, damit Reklamationen auf Grund der Garantie erfüllt werden können.

Beispiel 4:

Beurteilung des Meßfehlers bei der Härteprüfung nach Rockwell C.

Das Rockwell-Verfahren zur Bestimmung der Härte eines Materials ist folgendes: man drückt mit Hilfe bestimmter Lasten einen Kegel mit Diamantenspitze in das Material, wobei die Tiefe des Eindruckes die Härte bestimmt [24]. In der Rockwell-Skala sei $HRC\,(e; P_0, P_1, r)$ die Härte. Sie hängt von der Eindringtiefe e ab, aber auch von der Vorlast P_0, der Zusatzlast P_1, dem Kegelwinkel a und dem Krümmungsradius der Eindringspitze. Diese letzten Größen sind wohl durch Standardgrößen festgelegt, können sich aber bei den verschiedenen Kegeln etwas unterscheiden (Unregelmäßigkeiten der Konstruktion). Bedingt durch die Oberflächenbeschaffenheit des zu untersuchenden Materials durch die Halterung des Diamanten und durch Unregelmäßigkeiten in deren Kristallstruktur schwanken die ermittelten HRC-Werte bei ein- und demselben Gerät. Eine Abweichung von weniger als 0,2 Rockwell-Einheiten wird als unwesentlich betrachtet. Folgende Tatsachen seien festgestellt worden:

Es wurden 30 Instrumente an Modellen mit den Härten $HRC_m (m = 1, 2, \ldots, 10)$ ausprobiert. Bei dem Modell mit der Härte HRC_m seien z_m wesentliche Abweichungen festgestellt worden.

m	HRC_m	z_m
1	15	3
2	20	1
3	31	0
4	39	1
5	43	0
6	45	2
7	50	2
8	56	3
9	62	4
10	65	5

Es ist eine Schätzung der Häufigkeit des Auftretens von Meßfehlern ($\Delta HRC \geq 0{,}2$ Rockwell-Einheiten) bei den verschiedenen Härten gesucht. Hier kann man mittlere Konfidenzintervalle zu $\beta = 95\%$ benutzen. Dann erhält man obere und untere Grenzen für die Häufigkeiten $p_m\%$ der Meßfehler bei den Härten HRC_m:

$$3 < p_1 < 25$$
$$0 < p_2 < 15$$
$$0 < p_3 < 10$$
$$0 < p_4 < 15$$
$$0 < p_5 < 10$$
$$2 < p_6 < 20$$
$$2 < p_7 < 20$$
$$3 < p_8 < 25$$
$$5 < p_9 < 29$$
$$8 < p_{10} < 33$$

Nach den festgestellten Tatsachen müßte man dann folgendermaßen schließen:

Die störenden Einflüsse sind für größere *HRC* immer mehr bemerkbar. Das ROCKWELL-Verfahren wird man nach diesem Ergebnis vorzugsweise für Härten unterhalb 56 ROCKWELL-Einheiten benutzen.

Beispiel 5:

Beurteilung des Reifegrades von Baumwolle

Unter dem Mikroskop wird die Anzahl z der vollreifen Fasern aus n Fasern bestimmt. Es gibt eine Klasseneinteilung, die die Baumwolle nach dem Prozentsatz $p\%$ vollreifer Fasern einteilt [14].

Klasse	Anteil der vollausgereiften Fasern
völlig reif	über 84%
reif	77 bis 84%
mittelreif	68 bis 76%
unreif	60 bis 67%
völlig unreif	unter 60%

Es sei $z = 238$ bei $n = 300$.

Mit dem Binomialpapier bekommt man schnell ein Konfidenzintervall zu $\beta = 0{,}95 : 63 < p < 76$. Die Baumwolle ist also als unreif zu klassifizieren.

Beispiel 6:

Heilwirkung eines Medikaments

Ein Präparat ist bei 36 Krankheitsfällen angewandt worden. Dieses Präparat erwirkte bei 9 der Krankheitsfälle eine deutliche Besserung. Es ist der voraussichtliche Prozentsatz der Erfolge zu schätzen. Er sei mit p bezeichnet. In der Medizin arbeitet man meist mit Sicherheiten von 99%.

Es werden die extremalen Konfidenzintervalle aufgestellt. Dann ist $p \in (10{,}4; 46{,}7)$.

Nach CLOPPER und PEARSON würde man $p \in (9{,}3; 47{,}4)$ erhalten. Um Fehlurteile zu vermeiden, muß man ein extremales Schätzintervall nehmen und darf nicht etwa mit $p = 9 \cdot 100/36$ arbeiten. Wünscht man ein engeres Intervall, so muß man weitere Daten haben.

Beispiel 7:

Bestimmung der Anzahl der emittierten Alpha-Teilchen aus einer radioaktiven Substanz

Unter der Voraussetzung einer langen Halbwertszeit und der Ausschließung von Sekundäremission ist die Anzahl x in gleichen Zeitabständen emittierter Teilchen einer Menge von radioaktiver Substanz bestimmten Schwankungen um einen Mittelwert λ unterworfen [18].

Es ist bekannt, daß diese statistische Größe nach POISSON verteilt ist:

$$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Es sei die Anzahl a der Teilchen pro Minute gesucht. Mit einem Zählapparat wurde eine 20 Minuten währende Messung durchgeführt. Der Apparat zeigt die Größe $a' = 2{,}45$ Teilchen/Minute an. Damit ergibt die Messung: 49 Teilchen/20 Minuten.

Mit $\beta = 0{,}99$ erhält man aus der Tabelle (seltene Merkmale) das Intervall $32{,}8 < \lambda < 70{,}1$.

Dann liegt die Anzahl a der Teilchen pro Minute zwischen 1,64 und 3,50.

Beispiel 8:

Saatgutuntersuchung

Bei der Untersuchung von Saatgut ist die Bestimmung des Prozentsatzes von Unkrautsamen und des Prozentsatzes keimfähiger Samen wichtig. Es sind z. B. 300 Samen ausgezählt worden, und es wurden 20 Unkrautsamen festgestellt. Außerdem ergab sich, daß von 30 Samen 22 keimfähig waren. Bei einem Konfidenzkoeffizienten $\beta = 0{,}95$ kann man behaupten (unter Benutzung extremaler Konfidenzintervalle):

1. Der Prozentsatz an Unkrautsamen liegt zwischen 3,5% und 11,3%.
2. Der Prozentsatz keimfähiger Samen liegt zwischen 49,6% und 89,6%.

LITERATUR

[1] Millot, Sur la probalité a posteriori, C. R. Acad. Sci. Paris **176** (1923).

[2] Neyman, J., On two different Aspects of the Representative Method, Biometrika **32** (1934).

[3] Clopper, C. J., und E. S. Pearson, The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial, Biometrics **26** (1934).

[4] Neyman, J., On the problem of confidence intervals, Annals of Math. Stat. (AMS) **6** (1935).

[5] Ricker, The concepts of confidence or fiducial limits applied on the Poisson Frequency Distribution, Journ. of the Am. St. Assoc. **32** (1937).

[6] Prigge, Fehlerrechnung bei biologischen Messungen, Naturwiss. **25** (1937).

[7] Bartlett, M. S., Sub.-sampling for attributes, Suppl. Journ. Roy. Soc. **4** (1937).

[8] Neyman, J., Fiducial argument and the theory of confidence intervals, Biometrika **32** (1941).

[9] Geppert, M. P., Das Bayesche Rückschlußproblem, Deutsche Mathm. **7** (1942).

[10] Molina, E. C., Poisson's Exponential Binomial Limit, New York 1942.

[11] Koller, Graphische Tafeln, 2. Aufl., Dresden 1943.

[12] Mosteller and Tukey, The use and usefulness of binomial paper, Journ. Am. St. Ass. **44** (1949).

[13] Wilks, S. S., Mathematical Statistics, Princeton 1950.

[14] Graf und Henning, Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen, Berlin 1952.

[15] Tables of the Binomial Probability Distribution, Nat. Bureau of Standards Washington (1952).

[16] Hald, Statistical Theory with Engineering Applications, London 1952.

[17] Hamaker, H. C., Average confidence limits for binomial probability, Revue instit. Internat. de St. La Haye 1953, Vol. 21.

[18] Bennet, C. A., and N. S. Franklin, Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry, New York 1954.

[19] Schmetterer, L., Einführung in die mathematische Statistik, Wien 1956.

[20] Gnedenko, B. W., Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1957.

[21] Weber, Erna, Grundriß der biologischen Statistik, 3. Auflage, Jena 1957.

[22] Armitage, P., Numerical studies in the sequential estimation of a binomial parameter, Biometrika **45** (1958).

[23] Clunies-Ross, C. W., Intervall estimation for the parameter of a binomial distribution, Biometrika **45** (1958).

[24] Keller, Härteprüfung nach Rockwell C, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Sept. 1958.

[25] Bunke, Olaf, Konfidenzintervalle für den Parameter der Binomialverteilung, Diplomarbeit, Berlin 1959.

(Eingegangen: 29. 10. 1959)

Zusammenfassung

Olaf Bunke:

Neue Konfidenzintervalle für den Parameter der Binomialverteilung

Durch Einführung des Begriffes der Fehlerfunktion konnten die verschiedenen Verfahren zur Intervallschätzung des Parameters der Binomialverteilung beurteilt und die Verbesserungsfähigkeit der Konfidenzintervalle von Clopper und Pearson nachgewiesen werden. Es wurden neue Konfidenzintervalle aufgestellt, die vorteilhafter als die anderen sind. Sie wurden extremale Konfidenzintervalle genannt.

Es gibt eine andere Art von Konfidenzintervallen, deren Fehlerfunktion um die geforderte Irrtumswahrscheinlichkeit als Mittelwert schwankt. Es konnte gezeigt werden, daß die bisherigen mittleren Konfidenzintervalle unzuverlässig sind. Aus diesem Grunde wurden neue optimale mittlere Konfidenzintervalle aufgestellt und deren Eigenschaften untersucht.

Nach einem Vergleich der verschiedenen Intervallschätzungen wurden Anwendungsbeispiele gegeben. Als Anhang wurden Tabellen der extremalen und der optimalen mittleren Konfidenzintervalle für verschiedene übliche Stichprobenumfänge und Konfidenzkoeffizienten berechnet.

Олаф Бунке:

Новые доверительные интервалы для параметра биномиального распределения

Благодаря введению понятия функции ошибок был получен критерий для различных способов оценки интервалов параметра биномиального распределения, и Клоппер и Пирсон смогли выявить способность улучшения доверительных интервалов. Были установлены новые доверительные интервалы, более выгодные, чем другие. Они были названы экстремальными доверительными интервалами.

Существует другой вид доверительных интервалов, функция ошибок которых колеблется около требуемой вероятности ошибочности как среднего значения. Оказалось возможным показать, что прежние средние доверительные интервалы ненадёжны. По этой причине были установлены новые оптимальные средние доверительные интервалы и их свойства исследованы.

После сравнения различных оценок интервалов были даны примеры применения. В виде приложения вычислены таблицы экстремальных и оптимальных средних доверительных интервалов для различных обычно встречающихся выборочных диапазонов и доверительных коэффициентов.

Olaf Bunke:

New confidence intervals for the parameter of the binomial distribution

The different methods of interval estimation of the parameter of the binomial distribution could be judged by introducing the concept of error-function. It was shown that the confidence intervals of Clopper and Pearson can be improved. New confidence intervals were established. They were called extremal confidence intervals. They are more advantageous than the others.

There is another kind of confidence intervals with an error-function oscillating about the demanded error probability as an average. The unreliability of the known average confidence intervals could be proved. Therefore new optimum average confidence intervals were set up and their properties were examined.

After a comparison of the different confidence intervals several applications were shown. As an appendix tables of extremal and optimum average confidence intervals for several usual samplings and confidence coefficients were computed.

Olaf Bunke:

De nouveaux intervalles de confidence pour le paramétre de la distribution binomiale

Grâce à l'introduction de la notion „fonction fautive" on a pu juger des différents procédés pour évaluer l'intervalle du paramètre de la répartition binomiale, et prouver la possibilité d'amélioration des intervalles de confidence de Clopper et Pearson. On a établi de nouveaux intervalles de confidence qui sont plus avantageux que les autres. On les a appelés „intervalles de confidence extréma".

Il y a une autre sorte d'intervalle de confidence dont la fonction fautive oscille comme valeur moyenne autour de la probabilité d'erreur exigée. On a pu démontrer que les intervalles de confidence moyens employés jusqu'alors sont peu sûrs. C'est pourquoi on a établi de nouveaux intervalles de confidence moyens optima et qu'on en a examiné les propriétés. Après comparaison des différentes évaluations d'intervalles on donne des exemples d'application. Comme annexe on a calculé des tables d'intervalles de confidence extréma et moyens optima par différentes quantités d'épreuves au hasard et de coefficients de confidence usuels.

IX. Tabellen

1. Mittlere Konfidenzintervalle. $\beta = 0{,}95$

(Die Grenzen sind mit 10^3 multipliziert)

z	$n=5$		$n=6$		$n=7$		$n=8$		$n=9$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	485	00	406	00	356	00	325	00	293
1	20	665	17	594	14	530	13	481	11	439
2	106	765	87	738	73	669	64	612	57	562
3	235	894	189	811	159	736	137	722	120	667
4	335	980	262	913	264	841	225	775	197	716
5	515	1000	406	983	331	927	278	863	284	803
6			594	1000	470	986	388	936	333	880
7					644	1000	519	987	438	943
8							675	1000	561	989
9									767	1000

z	$n=10$		$n=11$		$n=12$		$n=13$		$n=14$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	268	00	247	00	234	00	215	00	200
1	10	404	09	374	08	348	08	325	08	308
2	51	519	45	483	42	454	39	423	36	397
3	108	620	97	578	89	545	81	509	75	480
4	175	709	158	664	143	623	131	577	122	556
5	252	748	225	700	205	698	187	659	173	624
6	291	825	300	775	234	766	215	726	200	692
7	380	892	336	842	312	795	274	785	251	749
8	481	949	422	903	377	857	341	812	308	800
9	596	990	517	955	454	911	423	869	376	827
10	732	1000	626	991	545	958	491	919	444	878
11			753	1000	652	992	577	961	520	925
12					766	1000	675	992	603	964
13							785	1000	692	992
14									800	1000

z	$n=15$		$n=16$		$n=17$		$n=18$		$n=19$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	189	00	177	00	169	00	160	00	152
1	08	285	07	271	06	257	06	245	05	233
2	33	375	32	355	28	338	28	323	26	307
3	70	454	65	433	61	409	58	390	55	375
4	113	526	105	499	98	475	93	453	86	434
5	160	592	148	567	139	537	131	514	123	491
6	189	655	177	624	169	595	160	569	152	545
7	232	713	215	681	202	651	188	623	178	597
8	387	767	266	734	248	703	224	677	218	646
9	345	811	319	785	297	752	278	722	261	694
10	408	840	376	823	349	798	323	776	306	739
11	474	887	433	852	405	831	377	812	354	782
12	546	930	501	895	463	861	431	840	403	822
13	625	697	567	935	525	902	486	869	455	848
14	725	992	645	968	591	939	547	907	509	877
15	811	1000	739	993	662	972	610	942	566	914
16			823	1000	743	994	677	972	625	945
17					831	1000	755	994	693	974
18							840	1000	767	995
19									848	1000

z	$n=20$		$n=21$		$n=22$		$n=23$		$n=24$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	145	00	139	00	134	00	128	00	124
1	05	223	05	214	05	205	05	197	04	189
2	25	293	23	281	23	269	22	259	21	250
3	53	356	49	341	47	328	45	318	43	305
4	83	415	79	398	75	386	72	368	68	355
5	116	474	111	452	106	435	101	418	97	403
6	145	526	139	500	134	483	128	466	124	449
7	168	573	159	551	152	531	144	511	138	494
8	206	621	195	598	186	576	177	556	167	537
9	246	667	234	646	221	614	211	598	201	578
10	289	711	273	686	259	661	246	639	235	618
11	333	754	314	727	298	702	283	682	270	657
12	379	794	354	766	339	741	318	717	305	695
13	427	832	412	805	386	779	361	754	343	730
14	474	855	449	841	424	814	402	789	381	765
15	526	883	500	861	469	848	444	823	422	799
16	585	917	548	889	517	866	489	856	463	833
17	644	947	602	921	565	894	534	872	506	862
18	707	975	659	951	614	925	582	899	551	876
19	777	995	719	977	672	953	632	928	597	903
20	855	1000	786	995	731	977	682	955	645	932
21			861	1000	795	995	741	978	695	957
22					866	1000	802	995	750	979
23							872	1000	811	996
24									876	1000

z	$n=25$		$n=26$		$n=27$		$n=28$		$n=29$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	119	00	115	00	110	00	107	00	104
1	04	183	04	181	04	173	04	167	03	161
2	19	240	19	232	18	224	17	217	17	214
3	41	293	39	283	38	274	36	265	35	257
4	66	343	63	331	61	320	58	309	56	303
5	92	389	89	380	85	365	82	353	79	342
6	118	434	115	420	110	406	107	394	104	382
7	132	479	126	462	121	447	116	434	112	420
8	161	521	154	502	148	486	143	472	137	457
9	192	551	181	541	173	525	167	491	161	494
10	224	598	215	580	206	561	198	556	191	517
11	257	636	246	620	236	598	227	580	214	564
12	292	668	279	652	267	635	257	615	247	597
13	332	708	313	687	308	667	288	648	276	630
14	364	743	348	721	333	692	319	681	303	662
15	402	776	380	754	365	733	352	712	338	696
16	449	808	420	785	402	764	385	743	370	724
17	479	839	459	819	439	794	420	773	403	753
18	521	868	498	846	475	827	444	802	436	786
19	566	882	538	874	514	852	509	833	483	809
20	611	908	580	885	553	879	528	857	506	839
21	657	934	620	911	594	890	566	884	543	863
22	707	959	669	937	635	915	606	893	580	888
23	760	981	717	961	680	939	647	918	618	896
24	817	996	768	981	726	962	691	942	658	921
25	881	1000	819	996	776	982	735	964	696	944
26			885	1000	827	996	783	983	743	965
27					890	1000	833	996	786	983
28							893	1000	839	997
29									806	1000

z	$n=30$		$n=31$		$n=32$		$n=33$		$n=34$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	100	00	97	00	96	00	91	00	89
1	03	156	03	150	03	146	03	141	03	137
2	16	207	16	200	15	194	14	188	14	183
3	34	249	33	242	32	235	31	228	30	222
4	54	293	53	284	51	275	49	267	48	260
5	77	332	74	322	72	313	69	305	67	297
6	100	370	97	360	94	354	91	343	87	334
7	108	408	104	400	101	387	98	375	94	366
8	132	448	128	432	123	420	119	409	115	399
9	156	481	150	467	146	454	141	442	137	431
10	183	519	174	500	171	487	165	474	160	462
11	207	552	200	533	194	519	188	494	183	493
12	238	582	229	567	222	550	214	536	207	523
13	267	613	256	596	248	581	239	566	232	552
14	293	644	284	627	275	613	265	596	257	581
15	325	675	314	658	302	646	293	625	283	609
16	356	707	343	686	331	669	319	657	309	637
17	387	733	373	716	354	698	343	681	334	666
18	420	762	400	734	387	725	375	707	363	691
19	448	793	432	771	419	752	404	735	391	717
20	481	817	467	800	450	778	434	761	419	743
21	519	843	500	826	481	804	464	786	448	768
22	552	868	533	850	513	829	506	812	477	793
23	592	892	568	872	546	854	526	835	507	817
24	630	900	603	896	580	877	558	859	538	840
25	668	923	640	903	613	899	591	881	569	863
26	707	946	678	926	646	906	625	902	601	885
27	751	966	716	947	687	928	657	909	634	906
28	793	984	758	967	725	949	695	931	666	913
29	843	997	800	984	765	968	733	951	703	933
30	900	1000	850	997	808	985	772	969	740	952
31			902	1000	854	997	812	986	778	970
32					904	1000	859	997	817	986
33							909	1000	863	997
34									911	1000

z	$n=35$		$n=36$		$n=37$		$n=38$		$n=39$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	m_z
0	00	86	00	85	00	82	00	80	00	78
1	03	134	03	130	03	127	03	124	03	120
2	14	177	14	172	14	167	13	164	13	160
3	29	220	28	214	27	208	26	202	26	198
4	46	254	45	248	43	240	42	235	41	230
5	65	289	63	286	61	277	60	270	58	263
6	85	324	83	316	81	308	78	300	76	294
7	92	357	88	347	87	339	84	331	82	323
8	112	389	109	379	106	370	103	365	100	355
9	133	420	129	414	125	403	122	392	119	382
10	155	451	151	443	146	430	142	419	138	410
11	177	485	172	471	167	459	163	448	158	438
12	201	515	195	500	189	487	184	475	179	465
13	220	537	214	529	208	514	202	502	198	491
14	249	567	241	557	235	541	227	529	221	517
15	274	595	265	586	257	570	250	555	243	543
16	299	622	286	608	277	597	270	591	263	568
17	324	649	315	634	305	610	296	608	288	593
18	351	676	340	660	330	646	320	635	311	618
19	378	701	366	685	354	670	344	656	334	645
20	405	726	392	714	390	695	365	680	355	666
21	433	751	414	735	403	723	392	704	382	689
22	463	776	443	759	430	743	409	730	407	712
23	485	799	471	786	459	765	445	750	432	737
24	515	823	500	805	486	792	471	773	457	757

z	$n=35$		$n=36$		$n=37$		$n=38$		$n=39$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_j$	$\underline{m}_z$	m_j	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	m_z	m_v	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
25	549	845	529	828	513	811	498	798	483	779
26	580	867	557	849	541	833	525	816	509	802
27	611	888	586	871	570	854	552	837	535	821
28	643	908	621	891	597	875	581	858	562	842
29	676	915	653	912	630	894	608	878	590	862
30	711	935	684	917	661	913	635	897	618	881
31	746	954	714	937	692	919	669	916	645	900
32	783	971	752	955	723	939	700	922	677	918
33	823	986	786	972	760	957	730	940	706	924
34	866	997	828	986	792	973	765	958	737	942
35	914	1000	870	997	833	986	798	974	770	959
36			915	1000	873	997	836	987	802	974
37					918	1000	876	997	840	987
38							920	1000	880	997
39									922	1000

z	$n=40$		$n=41$		$n=42$		$n=43$		$n=44$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	76	00	75	00	73	00	71	00	69
1	02	118	02	115	02	112	02	110	02	108
2	12	156	12	153	12	149	11	146	11	143
3	25	192	24	188	24	183	23	179	23	175
4	41	224	39	219	38	214	37	209	36	206
5	57	257	55	250	54	245	53	239	51	236
6	74	287	72	280	71	274	70	268	67	253
7	80	320	78	309	76	305	74	297	72	291
8	97	348	95	338	92	330	91	324	88	317
9	115	373	113	365	110	357	107	350	105	343
10	134	401	131	392	128	384	124	376	122	372
11	154	428	150	418	146	414	143	404	139	395
12	174	455	169	445	165	439	161	429	157	419
13	192	480	188	470	184	463	179	452	175	442
14	215	506	209	500	204	488	198	476	194	466
15	236	531	230	520	224	512	218	500	213	489
16	257	556	250	545	244	537	238	524	233	512
17	280	581	272	568	265	561	258	548	253	535
18	302	605	294	593	286	586	279	571	272	558
19	320	629	316	615	305	604	297	596	291	581
20	348	652	338	639	329	626	321	614	313	605
21	371	680	361	662	351	649	343	636	333	628
22	395	697	385	684	374	671	364	657	355	645
23	419	720	407	706	396	695	386	679	372	667
24	444	743	432	728	414	714	404	703	395	687
25	469	764	455	750	439	735	429	721	419	709
26	494	785	480	770	463	756	452	742	442	728
27	520	808	500	791	488	776	476	762	465	747
28	545	826	530	812	512	796	500	782	488	767
29	572	846	555	831	537	817	524	802	511	787
30	599	866	582	850	561	835	548	821	534	806
31	627	885	608	869	586	854	571	839	558	825
32	652	903	635	887	610	872	596	857	581	843
33	680	920	662	905	643	890	624	876	605	861
34	713	926	691	922	670	908	650	893	628	878
35	743	943	720	928	695	924	676	909	657	895
36	776	959	750	945	726	929	732	926	683	912
37	808	975	781	961	755	946	761	930	709	928
38	844	988	812	976	786	962	703	948	747	933
39	882	998	847	988	817	976	791	963	764	949
40	924	1000	885	998	851	988	821	977	794	964
41			925	1000	888	998	854	989	825	977
42					927	1000	890	998	857	989
43							929	1000	892	998
44									931	1000

z	$n=45$		$n=46$		$n=47$		$n=48$		$n=49$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
0	00	68	00	67	00	66	00	64	00	63
1	02	106	02	103	02	101	02	99	02	97
2	11	140	11	137	11	134	11	131	10	129
3	22	171	22	168	22	165	21	161	21	158
4	35	205	35	200	34	195	33	191	33	187
5	51	229	49	225	48	218	47	216	45	212
6	65	254	64	255	63	260	61	245	61	240
7	71	284	69	279	67	273	66	268	64	263
8	86	310	84	304	82	298	81	293	79	292
9	101	336	100	333	98	326	95	319	93	313
10	119	363	116	356	115	348	111	340	108	335
11	136	387	133	378	130	371	126	364	124	357
12	153	410	150	401	146	394	143	387	140	379
13	171	434	167	425	163	417	159	409	156	406
14	189	457	184	449	181	440	177	438	173	427
15	205	480	200	471	195	462	191	457	187	448
16	227	503	221	493	218	484	211	479	207	470
17	246	525	240	515	234	506	229	500	224	488
18	266	547	255	537	250	527	245	521	240	492
19	284	569	278	558	272	548	266	543	260	530
20	305	591	298	580	291	568	285	562	277	552
21	325	613	317	601	310	590	303	579	292	573
22	346	637	333	622	326	611	319	599	313	594
23	363	654	356	644	348	629	340	619	333	609
24	387	675	378	667	371	652	361	639	353	628

z	$n=45$		$n=46$		$n=47$		$n=48$		$n=49$	
	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$	$\underline{m}_z$	$\overline{m}_z$
25	409	695	399	683	389	673	381	660	372	647
26	431	716	420	702	410	690	401	681	391	667
27	453	734	442	722	432	709	421	697	406	687
28	475	754	463	745	452	728	438	715	427	708
29	497	773	485	760	473	750	457	734	448	723
30	520	795	507	779	494	766	479	755	470	740
31	543	811	529	800	516	782	500	771	508	760
32	566	829	551	816	538	805	521	789	512	776
33	590	847	575	833	560	819	543	809	530	793
34	613	864	599	850	583	837	562	823	552	813
35	637	881	622	867	606	854	591	841	573	827
36	664	898	644	884	629	870	613	857	594	844
37	690	914	667	900	652	885	636	874	621	860
38	716	929	696	916	673	902	660	889	643	876
39	746	935	721	931	702	918	681	905	665	892
40	771	949	745	936	727	933	707	919	687	907
41	795	965	775	951	750	937	732	934	708	921
42	829	978	800	965	782	952	755	939	737	936
43	860	989	832	978	805	966	784	953	760	939
44	894	998	863	989	835	978	809	967	788	955
45	932	1000	897	998	866	989	839	979	813	967
46			933	1000	899	998	869	989	842	979
47					934	1000	901	998	871	990
48							936	1000	903	998
49									937	1000

2. Extremale Konfidenzintervalle. $\beta = 0{,}95$

(Die Grenzen sind mit 10^3 multipliziert)

z	$n=50$		$n=60$		$n=70$		$n=80$		$n=90$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	71	00	60	00	51	00	45	00	40
1	01	107	01	90	01	77	01	68	01	60
2	07	137	06	115	05	110	04	87	04	78
3	17	166	14	139	12	120	10	106	09	94
4	28	192	23	162	20	140	17	123	15	110
5	40	218	33	184	29	159	25	140	22	125
10	100	338	83	286	71	248	62	218	55	196
15	179	446	147	379	125	328	109	290	96	260
20	264	548	217	467	184	406	160	359	141	323
25	356	644	291	551	246	480	213	426	189	383
30	452	736	268	632	311	552	269	490	237	441
35	554	821	449	709	378	622	327	553	287	497
40	662	900	533	783	448	689	386	614	340	553
45	782	967	621	853	520	754	447	673	393	607
50	929	1000	714	917	594	816	510	731	447	660
55			816	967	672	875	574	787	503	713
60			940	1000	762	929	641	840	559	763
65					841	971	710	891	617	811
70					949	1000	782	938	677	869
75							860	975	746	904
80							955	1000	804	945
85									875	978
90									960	1000

z	$n=100$		$n=150$		$n=200$		$n=300$		$n=500$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	36	00	24	00	18	00	12	00	07
1	01	54	00	37	00	28	00	18	00	11
2	04	70	02	47	02	36	01	24	01	14
3	08	85	05	57	04	43	03	29	02	17
4	14	99	09	67	07	50	05	34	03	20
5	20	113	13	76	10	57	07	38	04	23
10	49	176	31	119	24	90	16	60	10	36
15	86	236	57	159	42	121	28	82	17	49
20	126	292	83	199	62	151	41	101	25	61
25	169	347	111	235	82	178	55	121	33	73
30	213	399	139	272	103	207	68	139	41	85
35	257	449	168	309	125	235	83	159	49	95
40	303	503	198	344	147	263	97	178	58	107
45	350	553	228	380	169	289	112	196	66	119
50	398	602	259	415	191	316	126	215	75	130
60	497	697	325	481	237	367	156	250	93	152
70	601	787	385	549	285	419	187	285	111	173
80	708	874	451	615	332	471	218	320	129	194
90	824	951	519	675	381	522	250	355	147	216
100	964	1000	585	741	429	571	280	395	165	238
150			976	1000	684	809	443	557	259	341
200					982	1000	605	720	355	446
250							785	874	456	544
300							988	1000	554	645

3. Extremale Konfidenzintervalle

$\beta = 0{,}99$

(Die Grenzen sind mit 10^3 multipliziert)

z	$n=5$		$n=6$		$n=7$		$n=8$		$n=9$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	602	00	536	00	500	00	450	00	415
1	02	775	02	706	01	644	01	590	01	555
2	32	895	26	827	22	764	20	707	17	656
3	105	968	84	916	71	858	61	802	53	750
4	225	998	173	974	142	929	121	879	105	829
5	398	1000	294	998	236	978	198	939	171	895
6			464	1000	356	999	293	980	250	947
7					518	1000	410	999	344	983
8							550	1000	445	999
9									585	1000

z	$n=10$		$n=11$		$n=12$		$n=13$		$n=14$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	376	00	359	00	321	00	302	00	308
1	01	513	01	500	01	445	01	429	01	411
2	15	612	13	594	12	555	11	523	11	500
3	47	703	43	660	39	643	35	604	33	589
4	93	782	83	738	75	698	69	665	64	632
5	151	849	134	806	121	765	111	727	102	692
6	218	907	194	866	174	826	159	787	145	751
7	297	953	262	917	235	879	213	841	194	806
8	388	985	340	957	302	925	273	889	249	855
9	487	999	406	987	357	961	335	931	308	898
10	624	1000	500	999	445	988	396	965	368	936
11			641	1000	555	999	477	989	411	967
12					679	1000	571	999	500	989
13							698	1000	589	999
14									692	1000

z	$n=15$		$n=16$		$n=17$		$n=18$		$n=19$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	282	00	265	00	268	00	255	00	243
1	01	373	01	358	01	347	01	342	01	319
2	10	462	09	453	08	427	07	397	06	384
3	31	538	29	528	27	500	25	466	23	456
4	60	627	55	581	52	573	49	534	45	515
5	94	672	88	640	82	619	77	603	72	565
6	134	718	125	706	117	662	110	658	103	611
7	180	771	166	739	155	732	145	687	134	681
8	229	820	212	788	197	758	184	745	173	707
9	282	866	261	834	242	802	226	774	212	757
10	328	906	294	875	268	845	255	816	243	788
11	373	946	360	912	338	883	313	855	292	827
12	462	969	419	945	381	918	342	890	319	866
13	538	990	472	971	427	948	397	923	389	897
14	627	999	547	991	500	973	466	951	435	927
15	718	1000	642	999	573	992	534	975	485	955
16			735	1000	653	999	603	993	544	977
17					732	1000	658	999	616	994
18							745	1000	681	999
19									757	1000

z	$n=20$		$n=21$		$n=22$		$n=23$		$n=24$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	233	00	223	00	214	00	203	00	193
1	01	299	01	284	01	274	00	264	00	259
2	06	375	05	366	05	345	04	326	04	314
3	32	440	21	412	20	397	19	388	18	386
4	43	500	41	466	39	454	37	452	35	427
5	69	560	65	534	62	505	59	500	56	469
6	97	601	92	588	88	549	83	548	80	531
7	129	640	122	634	116	603	111	593	105	573
8	163	701	154	662	146	655	140	622	133	614
9	200	727	189	710	179	683	171	674	162	639
10	233	767	223	744	214	726	203	711	193	686
11	273	800	256	777	242	758	229	734	214	720
12	299	837	290	811	274	786	266	771	257	743
13	260	871	338	846	317	821	289	797	280	786
14	399	903	366	897	345	854	326	829	314	807
15	440	931	412	908	397	884	378	860	361	838
16	500	957	466	935	451	912	417	889	386	867
17	560	978	534	959	495	938	452	917	427	895
18	625	994	588	979	546	961	500	941	469	920
19	701	999	634	995	603	980	548	963	531	944
20	767	1000	716	999	655	995	612	981	573	965
21			777	1000	726	999	674	996	614	982
22					786	1000	736	1000	686	996
23							797	1000	741	1000
24									807	1000

z	$n=25$		$n=26$		$n=27$		$n=28$		$n=29$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	184	00	176	00	169	00	164	00	160
1	00	261	00	249	00	238	00	228	00	219
2	04	305	04	298	03	300	03	287	03	276
3	17	366	17	349	16	333	16	325	14	317
4	34	405	32	394	31	385	30	383	29	368
5	54	452	52	442	50	439	48	419	46	401
6	76	500	73	487	70	478	67	454	65	439
7	101	548	96	527	93	522	89	500	86	478
8	127	595	123	564	117	561	112	546	108	522
9	155	634	149	598	142	588	137	581	132	561
10	184	656	176	651	169	619	163	617	156	599
11	204	695	194	678	184	667	173	637	167	632
12	244	739	233	703	223	700	214	665	206	657
13	261	756	249	751	238	717	228	713	219	679
14	305	796	297	767	283	762	271	729	260	724
15	344	816	322	806	300	777	287	772	276	740
16	366	845	349	824	333	816	335	786	321	781
17	405	873	402	851	381	831	363	827	343	794
18	452	899	436	877	412	858	383	837	368	833
19	500	924	473	904	439	883	419	863	401	844
20	548	946	513	927	478	907	454	888	439	868
21	595	966	558	948	532	930	500	911	478	892
22	634	983	606	968	561	950	546	933	522	914
23	695	996	651	983	615	969	581	952	561	935
24	739	1000	702	996	667	984	617	970	599	954
25	916	1000	751	1000	700	997	675	984	632	971
26			824	1000	762	1000	713	997	683	986
27					831	1000	772	1000	724	994
28							836	1000	781	1000
29									804	1000

z	$n=30$		$n=31$		$n=32$		$n=33$		$n=34$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	162	00	158	00	153	00	148	00	145
1	00	211	00	203	00	197	00	190	00	187
2	03	265	03	255	02	246	02	238	02	231
3	14	310	13	309	13	298	12	288	12	278
4	28	353	27	339	25	326	25	328	24	316
5	44	387	43	380	42	374	40	370	39	357
6	62	430	61	431	59	415	56	399	54	384
7	83	469	80	464	77	445	74	429	72	419
8	104	504	101	500	97	478	94	462	91	450
9	127	538	122	536	118	522	114	500	111	486
10	151	570	145	569	140	555	134	538	131	518
11	162	613	158	589	153	585	148	571	145	550
12	197	647	190	620	183	610	176	601	170	581
13	211	671	203	661	200	633	196	630	187	616
14	249	693	240	691	230	674	221	648	212	643
15	265	735	255	705	246	702	238	672	231	663
16	307	751	295	745	283	717	272	712	262	684
17	329	789	309	760	298	754	288	728	270	730
18	353	803	339	797	326	770	328	772	316	738
19	387	838	380	810	367	800	352	779	337	769
20	430	849	411	842	390	817	370	804	357	788
21	462	873	431	855	415	847	399	824	384	813
22	496	896	464	878	445	860	429	852	419	830
23	531	917	500	899	478	882	462	866	450	855
24	570	938	536	920	522	903	500	886	482	869
25	613	956	569	939	555	923	538	906	514	889
26	647	972	620	957	585	941	571	926	550	909
27	690	986	661	973	626	958	601	944	581	928
28	735	997	691	987	674	975	630	960	616	946
29	789	1000	745	997	702	987	672	975	643	961
30	838	1000	797	1000	754	998	712	988	684	976
31			842	1000	803	1000	762	998	722	988
32					847	1000	810	1000	769	998
33							852	1000	813	1000
34									855	1000

z	$n=35$		$n=36$		$n=37$		$n=38$		$n=39$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	140	00	137	00	134	00	130	00	127
1	00	183	00	179	00	176	00	171	00	176
2	02	227	02	222	02	218	02	215	02	216
3	12	269	11	260	11	253	11	248	11	244
4	23	311	23	308	22	299	22	289	21	281
5	37	345	36	334	35	325	34	318	33	313
6	53	376	52	368	50	361	49	361	47	350
7	70	411	68	412	66	398	64	386	62	373
8	88	449	85	439	83	424	81	410	79	403
9	107	484	104	467	101	452	98	439	95	432
10	127	516	123	500	120	479	116	470	113	461
11	140	540	137	533	134	521	130	500	127	490
12	164	566	160	561	154	548	150	530	145	518
13	190	589	183	588	179	576	173	561	168	541
14	205	624	197	606	191	602	183	590	176	568
15	227	655	222	632	218	621	213	614	207	597
16	252	679	243	666	235	642	223	639	216	627
17	269	692	260	692	253	675	248	655	244	650
18	308	731	294	706	284	701	275	682	264	667
19	321	748	308	740	299	716	289	711	281	687
20	345	773	334	757	325	747	318	725	313	719
21	376	795	368	778	358	765	345	752	333	736
22	411	810	394	803	379	782	361	777	350	675

z	$n=35$		$n=36$		$n=37$		$n=38$		$n=39$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
23	434	836	412	817	398	809	386	787	373	784
24	460	860	439	840	424	821	410	817	403	793
25	484	873	467	863	452	846	439	827	432	823
26	516	893	500	877	479	866	470	850	459	832
27	551	912	533	896	521	880	500	870	482	855
28	589	930	561	915	548	899	530	884	510	873
29	624	947	588	932	576	917	561	902	539	887
30	655	963	632	948	602	934	590	919	568	905
31	689	977	666	963	639	950	614	936	597	921
32	731	988	692	977	675	965	639	951	627	938
33	773	998	740	989	701	978	682	966	650	953
34	817	1000	778	998	747	989	711	978	687	967
35	860	1000	821	1000	782	998	752	989	719	979
36			863	1000	824	1000	785	998	756	989
37					866	1000	829	1000	784	998
38							870	1000	824	1000
39									878	1000

z	$n=40$		$n=41$		$n=42$		$n=43$		$n=44$		$n=45$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	124	00	122	00	119	00	117	00	114	00	111
1	00	171	00	166	00	162	00	158	00	154	00	150
2	02	211	02	204	02	200	01	194	01	189	01	184
3	11	240	11	237	10	238	10	232	10	226	10	220
4	21	273	20	265	20	258	19	254	19	250	18	241
5	32	310	32	308	31	299	31	291	30	283	29	276
6	46	339	44	330	44	321	42	313	42	309	41	304
7	61	364	60	358	58	351	56	354	54	345	53	336
8	76	396	74	390	72	386	71	376	69	366	67	356
9	93	434	91	422	88	410	86	398	84	388	82	380
10	110	460	107	446	104	433	102	421	100	415	97	409
11	124	485	122	471	119	457	117	444	114	441	111	442
12	141	515	137	500	133	481	130	474	126	468	123	466
13	163	540	158	529	154	519	151	500	147	491	143	488
14	171	566	166	554	162	543	158	526	154	517	150	512
15	206	581	195	548	190	567	185	556	180	538	175	536
16	211	604	204	599	200	590	194	579	189	559	184	558
17	240	636	235	616	229	614	222	602	216	590	211	567
18	256	661	249	642	238	629	232	624	226	612	220	592
19	273	679	265	670	258	649	254	646	250	634	241	620
20	305	695	296	692	287	679	279	658	270	655	262	644
21	321	727	308	704	299	701	291	687	283	668	276	664
22	339	744	330	735	321	713	313	709	309	691	304	678
23	364	760	358	751	351	742	342	721	332	717	322	696
24	396	789	384	765	371	762	354	746	345	730	336	724
25	419	794	401	796	386	771	376	768	366	750	356	738
26	434	829	422	805	410	800	398	778	388	774	380	759
27	460	837	446	834	433	810	421	806	410	784	408	780
28	485	859	471	842	457	838	444	815	441	811	433	789
29	515	876	500	863	481	846	474	842	462	820	442	816
30	540	890	529	878	519	867	500	849	483	846	464	825
31	566	907	554	893	543	881	526	870	509	853	488	850
32	604	924	578	909	567	896	556	883	532	874	512	857
33	636	939	610	926	590	912	579	898	559	886	534	877
34	661	954	642	940	614	929	602	914	585	900	558	889
35	690	968	670	956	649	942	624	929	612	916	591	903
36	727	979	692	968	679	956	646	944	634	931	620	918
37	760	989	735	980	701	969	687	958	655	946	644	933
38	789	998	763	989	742	980	709	969	691	958	664	943
39	829	1000	796	998	762	990	746	981	717	970	696	959

z	$n=40$		$n=41$		$n=42$		$n=43$		$n=44$		$n=45$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
40	876	1000	834	1000	800	998	768	990	750	981	724	971
41			878	1000	838	1000	806	999	774	990	759	982
42					881	1000	842	1000	811	999	780	990
43							883	1000	846	1000	816	999
44									886	1000	850	1000
45											889	1000

z	$n=46$		$n=47$		$n=48$		$n=49$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	109	00	107	00	105	00	103
1	00	146	00	143	00	140	00	137
2	01	180	01	175	01	172	01	168
3	09	215	08	210	08	205	08	200
4	17	241	17	245	16	239	16	233
5	28	270	27	263	27	257	26	253
6	40	299	39	300	38	293	37	286
7	52	327	51	319	51	312	49	304
8	66	348	64	342	63	337	62	332
9	80	376	78	378	76	369	74	360
10	94	409	92	399	91	389	89	380
11	109	431	107	420	105	409	103	399
12	120	452	117	441	114	430	113	423
13	140	474	132	462	134	453	131	448
14	146	500	143	483	140	475	137	469
15	171	526	167	517	164	500	160	491
16	180	548	175	538	172	525	168	512
17	205	569	201	559	196	547	191	523
18	215	591	210	580	205	570	200	552
19	241	605	236	601	232	591	225	577
20	252	624	245	622	239	611	233	601
21	270	652	263	636	257	631	253	620
22	298	673	291	658	282	643	275	640
23	311	689	300	681	293	663	286	655
24	327	702	319	700	312	688	304	668
25	348	730	342	709	337	707	332	696
26	376	748	364	737	356	718	345	714
27	395	759	378	755	369	742	360	725
28	409	785	399	764	389	761	380	747
29	431	795	420	790	409	768	399	767
30	452	820	441	799	430	795	423	775
31	474	829	462	825	453	804	448	800
32	500	854	483	833	475	829	477	809
33	526	860	517	857	500	836	488	832
34	547	880	538	868	525	860	509	840
35	568	891	559	883	547	866	531	863
36	591	906	580	893	570	886	552	869
37	624	920	601	908	591	895	577	887
38	652	934	622	922	611	909	601	897
39	673	948	658	936	631	924	620	911
40	701	960	681	949	663	937	640	926
41	730	972	700	961	688	949	668	938
42	759	983	737	973	707	962	696	951
43	785	991	755	983	742	973	714	963
44	820	999	790	992	761	984	747	974
45	854	1000	825	999	795	992	767	984
46	891	1000	857	1000	828	999	800	997
47			893	1000	860	1000	832	999
48					895	1000	863	1000
49							897	1000

z	$n=50$		$n=60$		$n=70$		$n=80$		$n=90$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	101	00	85	00	73	00	64	00	57
1	00	140	00	118	00	102	00	90	00	80
2	03	172	03	145	02	126	02	111	02	99
3	09	203	07	172	06	149	05	131	05	117
4	17	231	14	196	12	169	10	149	09	134
5	26	258	22	219	19	189	16	167	15	149
10	88	381	74	324	62	281	54	249	48	224
15	149	490	123	418	104	364	90	323	80	290
20	229	591	187	507	158	443	137	394	121	353
25	315	685	256	590	217	518	188	461	165	415
30	409	771	331	669	278	589	241	525	212	473
35	510	851	410	744	343	657	296	587	260	530
40	619	921	493	813	414	722	354	646	310	585
45	742	978	582	878	482	783	413	704	362	638
50	899	1000	676	935	557	842	475	759	415	690
55			781	978	636	896	539	812	470	740
60			915	1000	719	938	606	863	527	788
65					811	981	677	910	585	835
70					927	1000	751	946	647	879
75							833	984	710	920
80							936	1000	776	952
85									851	985
90									943	1000

z	$n=100$		$n=150$		$n=200$		$n=300$		$n=500$	
	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$	$\underline{e}_z$	$\overline{e}_z$
0	00	52	00	35	00	26	00	18	00	11
1	00	72	00	49	00	37	00	25	00	15
2	01	89	01	60	01	46	00	31	00	18
3	04	106	03	71	02	54	01	36	01	22
4	08	121	06	82	04	62	03	41	02	25
5	13	135	09	92	06	69	04	46	03	28
10	43	203	28	137	21	104	14	70	08	42
15	72	263	47	180	35	137	23	92	14	55
20	109	321	71	219	53	167	35	113	21	68
25	148	376	97	259	72	197	47	134	28	81
30	189	430	123	296	91	225	60	153	36	93
35	232	482	151	332	112	253	73	172	44	104
40	276	534	179	369	133	282	87	191	52	116
45	323	583	209	404	154	303	101	211	60	128
50	369	631	239	440	175	338	115	234	68	139
60	466	724	298	507	220	390	143	265	85	163
70	570	811	362	574	265	442	174	302	103	185
80	679	891	426	638	312	493	204	339	121	207
90	797	962	493	702	359	544	235	373	138	228
100	948	1000	560	762	407	593	265	407	155	250
150			965	1000	662	825	426	574	249	356
200					974	1000	593	735	344	460
250							777	885	442	558
300							982	1000	540	656

4. Kofidenzintervalle bei seltenen Merkmalen

(Konfidenzintervalle für den Parameter der Poissonverteilung)

$\beta = 0{,}95$

(Die Grenzen sind mit 10^2 multiplziiert)

z	$\underline{\lambda}_z$	$\overline{\lambda}_z$	z	$\underline{\lambda}_z$	$\overline{\lambda}_z$
0	00	369	26	1698	3810
1	05	557	27	1779	3928
2	36	722	28	1801	4047
3	82	877	29	1942	4165
4	137	1024	30	2024	4283
5	197	1167	31	2105	4400
6	261	1306	32	2190	4515
7	329	1442	33	2270	4635
8	369	1576	34	2355	4750
9	412	1708	35	2438	4868
10	480	1839	36	2520	4985
11	549	1968	37	2605	5100
12	620	2096	38	2690	5215
13	692	2223	39	2775	5330
14	765	2349	40	2858	5447
15	840	2474	41	2940	5560
16	915	2598	42	3025	5675
17	990	2722	43	3110	5790
18	1067	2845	44	3195	5905
19	1144	2967	45	3282	6021
20	1222	3086	46	3370	6135
21	1300	3210	47	3455	625ß
22	1379	3331	48	3540	6365
23	1458	3451	49	3625	6480
24	1538	3571	50	3711	6592
25	1618	3690			

5. Konfidenzintervalle bei seltenen Merkmalen

(Konfidenzintervalle für den Parameter der Poissonverteilung)

$\beta = 0{,}99$

(Die Grenzen sind mit 10^2 multipliziert)

z	$\underline{\lambda}_z$	$\overline{\lambda}_z$	z	$\underline{\lambda}_z$	$\overline{\lambda}_z$
0	00	530	26	1474	4225
1	01	743	27	1549	4335
2	15	927	28	1624	4474
3	43	1098	29	1700	4598
4	82	1259	30	1777	4721
5	128	1415	31	1855	4845
6	179	1566	32	1930	4969
7	233	1713	33	2010	5090
8	291	1853	34	2085	5210
9	351	2000	35	2164	5333
10	413	2140	36	2240	5455
11	477	2278	37	2320	5575
12	530	2414	38	2400	5695
13	558	2550	39	2480	5815
14	623	2684	40	2559	5936
15	689	2816	41	2640	6055
16	757	2948	42	2720	6175
17	825	3079	43	2800	6295
18	894	3209	44	2880	6415
19	964	3338	45	2960	6534
20	1035	3467	46	3040	6655
21	1107	3595	47	3120	6770
22	1179	3722	48	3205	6890
23	1252	3848	49	3285	7010
24	1325	3974	50	3366	7127
25	1400	4100			